ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

20 січня – 21 січня 2018 року, м.Львів

7 клас

1. Поставте замість x, y такі цифри, щоб число $212x1234517y$ ділилося на 72. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Шукане число 212212345176.

Розв'язок. Для подільності числа на 72 необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 8 і на 9. Число ділиться на 8 тоді і лише тоді, коли число, яке складається з трьох його останніх цифр, тобто $17y$, ділиться на 8. Отже, остання цифра $y = 6$. За ознакою подільності на 9, треба щоб сума усіх цифр ділилася на 9. Тоді $x = 2$ і шукане число 212212345176.

2. Пройшовши половину шляху поїзд збільшив швидкість на 25% і тому прибув у пункт призначення на півгодини раніше. За який час був пройдений весь шлях? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. 4,5 год.

Розв'язок. Нехай s — весь шлях, а v — швидкість на першій половині шляху. Тоді

$$\frac{s}{2v} - \frac{s}{2 \cdot 1,25v} = 0,5; \Longleftrightarrow \frac{s}{2v} = 0,5 \cdot \frac{1,25}{0,25} \Longrightarrow$$

$$t = \frac{s}{2v} + \frac{s}{2 \cdot 1,25v} = \frac{s}{2v} \cdot \frac{2,25}{1,25} = 0,5 \cdot \frac{1,25}{0,25} \cdot \frac{2,25}{1,25} = 4,5$$

3. Знайти всі такі цілі числа x і y, для яких виконується рівність

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2018.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Таких цілих чисел нема.

Розв'язок. Зауважимо, що $(x+y)^2-(x-y)^2 = 2018 \Longleftrightarrow 4xy = 2018 \Longleftrightarrow 2xy = 1009$, що неможливо.

4. Чи можна 54 монети розкласти по 11 гаманцях так, щоб у кожному з гаманців була різна їх кількість? При цьому один з гаманців може бути порожнім. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Не можна.

Розв'язок. Припустимо, що монети можна так розмістити в 11 гаманцях. Нехай $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$, де a_j кількість монет в j-ому гаманці.

Тоді, $a_j \geq j-1$ і, отже, $54 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ – суперечність.

5. Нехай ціле число $n \geq 5$ таке, що $n-1,\ n+1$ – прості числа ("*прості близнюки*"). Довести, що n ділиться націло на 6.

Розв'язок. Серед трьох послідовних цілих чисел $n-1,\ n,\ n+1$, одне ділиться на 3 і принаймні одне ділиться на 2. Але, $n-1,\ n+1$ – прості числа, і за умовою $n-1 \geq 4$ ($\Longrightarrow n-1 \geq 5$), тому, на 3 і на 2 ділиться n.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

20 січня – 21 січня 2018 року, м.Львів

8 клас

1. Знайти всі такі натуральні числа x і y, для яких виконується рівність

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4036.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $(x, y) \in \{(1, 1009), (1009, 1)\}$.

Розв'язок. Зауважимо, що $(x+y)^2-(x-y)^2 = 4036 \Longleftrightarrow 4xy = 4036 \Longleftrightarrow xy = 1009$, але 1009 – просте число. Звідси, $(x, y) \in \{(1, 1009), (1009, 1)\}$.

2. Знайти всі такі значення x, для яких

$$\{x - 2018\} + [x - 2018] + |x - 2018| = 0,$$

де $[x], \{x\}$ позначають, відповідно, цілу і дробову частину числа x. Наприклад, $[2,3] = 2$, $[-2,4] = -3$, $\{2,3\} = 0,3$, $\{-2,4\} = 0,6$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in (-\infty, 2018]$.

Розв'язок. Зауважимо, що $\{t\} + [t] = t$, а $|t| = -t \Longleftrightarrow t \leq 0$.

3. Відомо, що $p-2, p, p+32, p+36$ — прості числа (додатні). Знайдіть всі такі p. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $p = 5$.

Розв'язок. Число p при діленні на 3 може давати остачу 0, 1 або 2. Якщо $p = 3k+1$, то $p+32 = 3k+33$ — складене; якщо $p = 3k$, то $p+36 = 3k+36$ — складене; якщо $p = 3k+2$, то $p-2 = 3k$ — просте тільки у випадку $k = 1$. Отже, $p = 5$.

4. У трапеції сума кутів при основі дорівнює $90°$. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції дорівнює половині різниці основ.

Розв'язок. Переносимо бічні сторони трапеції паралельно самим собі до середини верхньої основи. Бічні сторони разом з частиною нижньої основи трапеції, яка дорівнює $a-b$, де a, b — довжини основ, утворюють прямокутний трикутник, гіпотенузою якого є цей відрізок довжиною $a-b$, а відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, є медіаною m проведеною до гіпотенузи отриманого прямокутного трикутника і дорівнює половині гіпотенузи $m = \frac{a-b}{2}$, що й потрібно було довести.

5. Чи можна 2018 фішок розкласти по клітинках шахової дошки розміру 8×8 так, щоб не залишилося незаповнених клітинок і у кожній з клітинок була різна їх кількість ? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь. Не можна.

Розв'язок. Припустимо, що фішки можна так розмістити в клітинках шахової дошки. Нехай $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{64}$, де a_j кількість фішок в j-ій клітинці. Тоді, $a_j \geq j$ і, отже, $2018 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{64} \geq 1 + 2 + \ldots + 64 = 2080$ – суперечність.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

20 січня – 21 січня 2018 року, м.Львів

9 клас

1. Знайдіть всі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\sqrt{2x+2018} - \sqrt{x-1009} \geq \sqrt{3x+1009}.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x = 1009$.

Розв'язок. ОДЗ нерівності $x \geq 1009$. Далі,

$$\sqrt{2x+2018} \geq \sqrt{x-1009} + \sqrt{3x+1009} \Longrightarrow 2018 - 2x \geq 2\sqrt{3x+1009}\sqrt{x-1009}$$
$$\Longrightarrow x \leq 1009, x \geq 1009.$$

Перевіркою встановлюємо, що $x = 1009$ є розв'язком нерівності.

2. Знайти найменше значення x, для якого

$$2\left[\frac{x-6}{3x-1}\right] = \frac{2x-12}{3x-1} - \left\{\frac{x-6}{3x-1}\right\},$$

де $[t], \{t\}$ позначають, відповідно, цілу і дробову частину числа t. Наприклад, $[2,3] = 2$, $[-2,4] = -3$, $\{2,3\} = 0,3$, $\{-2,4\} = 0,6$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x = -2,5$.

Розв'язок. Зауважимо, що $2[t] = 2t - \{t\} \Longleftrightarrow \{t\} = 0$, звідки, $t = n$ – ціле число, а тому,

$$\frac{x-6}{3x-1} = n \Longleftrightarrow x = \frac{n-6}{3n-1} = \frac{1}{3} - \frac{17}{3(3n-1)}.$$

Звідси, $-2,5 \leq x < \frac{1}{3}$ для $n \geq 1$, і $\frac{1}{3} < x \leq 6$ для $n \leq 0$.

3. Довести, що рівняння $x^4 + 4y^4 = 2018$ не має розв'язків у натуральних числах x і y. Відповідь обгрунтувати.

Розв'язок. Зауважимо, що $x^4 + 4y^4 = (x^2+2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy) = 2 \cdot 1009$. Але вирази у круглих дужках мають однакову парність і, отже, їхній добуток є або непарним, або парним і кратним 4. Що в обидвох випадках є неможливо.

4. На столі розташовано 2018 сірників. Два хлопчики грають у таку гру: вони по-черзі беруть зі столу сірники. При цьому за правилами гри гравець кожного разу може взяти лише або 2, або 5 сірників. Виграє той, хто забере зі столу останній сірник. Хто виграє і як він для цього повинен грати? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Виграє хлопчик, який розпочинає гру.
Розв'язок. Виграє хлопчик, який розпочинає гру. Для цього йому потрібно кожного разу після свого ходу залишати на столі кількість сірників, яка ділиться на 7. Першим ходом він забирає 2 сірники – на столі залишиться 2016 сірників, після першого ходу свого суперника, він бере стільки сірників, щоб на столі залишилось 2009 сірників і т.д.

5. У рівнобічній трапеції різниця довжин її основ дорівнює c, а сума кутів при більшій основі дорівнює $120°$. Знайти довжину відрізка, який з'єднує середини основ трапеції. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.
Розв'язок. Переносимо бічні сторони трапеції паралельно самим собі до середини верхньої основи. Бічні сторони разом з частиною нижньої основи трапеції, яка дорівнює $=a-b$, де a, b — довжини основ, утворюють рівносторонній трикутник, зі стороною $c=a-b$, а відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, є висотою m цього трикутника і дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

20 січня – 21 січня 2018 року, м.Львів

10 клас

1. Розв'язати нерівність

$$\sqrt[3]{x+2018} > \sqrt{x+2014}.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in [-2014, -2010)$.
Розв'язок. Після заміни $\sqrt{x+2014} = t$ перепишемо рівняння $\sqrt[3]{x+2018} = \sqrt{x+2014}$. у вигляді

$$t^3 - t^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (t-2)(t^2+t+2) = 0 \Longleftrightarrow t = 2 \Longleftrightarrow x = -2010.$$

ОДЗ нерівності $x \geq -2014$. Далі за методом інтервалів нескладно знаходимо відповідь.

2. Розв'язати рівняння $x^4 + y^4 = 2018$ у натуральних числах x і y. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків у натуральних числах.

Розв'язок. Зауважимо, що $\max\{x, y\} \leq 6$, бо $7^4 = 2401 > 2018$. Нехай $x \leq y$. Тоді, $2y^4 > 2018 \Longrightarrow y^4 \geq 1009 \Longrightarrow y \geq 6 \Longrightarrow y = 6 \Longrightarrow x^4 = 2018 - 1296 = 722 = 2 \cdot 19^2 \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$.

3. Нехай a, b, c — цілі числа. Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на 12. Доведіть, що $a^4 + b^4 + c^4$ ділиться на 12.

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{gathered} a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^4 - a^2 + b^4 - b^2 + c^4 - c^2 = \\ = a^2(a^2-1) + b^2(b^2-1) + c^2(c^2-1) = \\ = a(a-1)a(a+1) + b(b-1)b(b+1) + c(c-1)c(c+1). \end{gathered}$$

Кожен з трьох виразів $(a-1)a(a+1)$, $(b-1)b(b+1)$, $(c-1)c(c+1)$ є добутком трьох послідовних цілих чисел, а отже ділиться на 6. Далі, якщо a – парне, то $(a-1)a^2(a+1)$ ділиться на 4, а, отже, і на 12. Якщо ж $a-1$ – парне, то таким є $a+1$ і $(a-1)a^2(a+1)$ ділиться на 4, а, отже, і на 12. Подібно, два інші вирази $(b-1)b^2(b+1)$, $(c-1)c^2(c+1)$ діляться на 12. Але, за умовою $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на 12.

4. Знайти всі дійсні значення x, для яких $x^2 - [x] - 4\{x\} < 0$, де $[x], \{x\}$ позначають, відповідно, цілу і дробову частину числа x. Наприклад, $[2,3] = 2$, $[-2,4] = -3$, $\{2,3\} = 0,3$, $\{-2,4\} = 0,6$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in (1,2) \cup (0,1) \cup (2-\sqrt{7},0) \cup (2-\sqrt{10},-1)$.
Розв'язок. Нескладно переконуємося, що $x^2 - [x] - 4\{x\} < 0 \Longleftrightarrow x^2 - x - 3\{x\} < 0$. Зауважимо, що $\{x\} = x - n$ для $x \in [n, n+1)$, де n – ціле число. Тому, для $x \in [n, n+1)$

$$\begin{gathered} x^2 - x - 3\{x\} < 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 3n < 0 \Longleftrightarrow \\ n \le 1 \text{ і } \ x \in (2-\sqrt{4-3n}, 2+\sqrt{4-3n}) \cap [n, n+1) \Longleftrightarrow \\ x \in (1,2) \cup (0,1) \cup (2-\sqrt{7},0) \cup (2-\sqrt{10},-1). \end{gathered}$$

5. У трапеції довжини її бічних сторін дорівнюють c_1, c_2, а сума кутів при більшій основі дорівнює $180^\circ - \alpha$, $0 < \alpha < 90^\circ$. Знайти різницю довжин основ трапеції. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\alpha}$.

Розв'язок. Переносимо бічні сторони трапеції паралельно самим собі до середини верхньої основи. Бічні сторони разом з частиною нижньої основи трапеції, яка дорівнює $c = a - b$, де a, b — довжини основ, утворюють трикутник з кутом при вершині, що дорівнює α, бічними сторонами c_1, c_2 і третьою стороною $c = a - b$. За теоремою косинуса отримуємо відповідь

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\alpha.$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

20 січня – 21 січня 2018 року, м.Львів

11 клас

1. Відшукайте всі такі натуральні числа x, y, z, t, що

$$3 \cdot (x^2 + y^2) = 2018 \cdot (z^2 + t^2).$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Таких натуральних чисел x, y, z, t нема.

Розв'язок. Нехай (x, y, z, t) — розв'язок рівняння в натуральних числах, для якого $x^2 + y^2$ набуває найменшого значення. Оскільки квадрат натурального числа при діленні на 3 може давати в остачі лише 0 або 1, то з того, що $z^2 + t^2$ ділиться на 3, випливає що і z, і t діляться на 3. Але тоді $z = 3z_1$, $t = 3t_1$, $z^2 + t^2 = 9(z_1^2 + t_1^2)$. Тоді, $(x^2 + y^2) = 3 \cdot 2018 \cdot (z_1^2 + t_1^2)$ і з того, що $x^2 + y^2$ ділиться на 3, випливає що і x, і y діляться на 3, тобто, $x = 3x_1$, і $y = 3y_1$. Звідси, $3 \cdot (x_1^2 + y_1^2) = 2018 \cdot (z_1^2 + t_1^2)$. Отже, (x_1, y_1, z_1, t_1) — інший розв'язок заданого рівняння в натуральних числах

Але $x_1^2 + y_1^2 < x^2 + y^2$, що суперечить припущенню.

2. Розв'яжіть нерівність $\quad x + \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} > \dfrac{35}{4}$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in (3, \frac{15}{4}) \cup (5, +\infty)$.

Розв'язок. Очевидно, що ОДЗ $x > 3$. Піднесемо обидві частини відповідного рівняння до квадрату

$$x^2 + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} + \frac{9x^2}{x^2 - 9} = \frac{1225}{16} \iff \frac{x^4}{x^2 - 9} + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} - \frac{1225}{16} = 0 \iff$$

$$t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad t^2 + 6t - \frac{1225}{16} = 0 \iff \quad t = \frac{25}{4} \iff \quad x \in \{\frac{15}{4},\ 5\}.$$

Далі, за методом інтервалів встановлюємо, що $x \in (3, \frac{15}{4}) \cup (5, +\infty)$.

3. Розв'яжіть рівняння $\quad 7\sqrt[3]{21x + 13} + 6 = (3x + 1)^3$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in \{-1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\}$.

Розв'язок. Нехай $a = \sqrt[3]{21x + 13}, b = 3x + 1$, тоді

$$7a + 6 = b^3,\ a^3 = 7b + 6. \qquad (1)$$

Графіками цих рівнянь є графіки монотонних взаємно обернених функцій, а розв'язки системи рівнянь (1) задовольняють умову $a = b$. Отже, $a^3 = 7a + 6$, $a^3 - 7a - 6 = 0$. Зауважимо, що $a = -2$ — корінь рівняння. Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$(a+2)(a^2-2a-3) = 0,\ (a+2)(a+1)(a-3) = 0,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_3 = 3.$$

Оскільки $a = \sqrt[3]{21x+13}$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2018x - 2y = \cos 2y - \cos 2018x, \\ x + y = 101. \end{cases}$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $(0,1; 100,9)$.

Розв'язок. Розглянемо функцію $f(x) = x + \cos x$. Вона монотонно зростає на всій числовій осі, позаяк $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ для всіх x. Тому,

$$2018x - 2y = \cos 2y - \cos 2018x \Longleftrightarrow f(2018x) = f(2y) \Longleftrightarrow 2018x = 2y.$$

З другого рівняння негайно отримуємо $x = 0,1$, $y = 100,9$.

5. Нехай a, b, c – довжини сторін деякого трикутника периметра 2. Довести, що:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$,

b) для довільної сталої $k < 2$, знайдеться трикутник периметра 2, для якого виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq k$.

Розв'язок. a) Зауважимо, що

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab+ac+bc) + (a+b+c) - 1 =$$
$$= abc - (ab+ac+bc) + 1 \Longrightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 4 - 2(ab+ac+bc) + 2abc = 2(a-1)(b-1)(c-1) + 2.$$

За формулою Герона, квадрат площі трикутника $S^2 = (1-a)(1-b)(1-c)$, звідки, $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 2 - 2S^2 < 2$.

b) З іншого боку, $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = r$, де r – радіус вписаного у трикутник кола. Тому, $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 2 - 2r^2$. Зрозуміло тепер, що оскільки існує трикутник заданого периметра з довільно малим радіусом вписаного кола, то уточнити нерівність з п. а) не можна.