

11 клас (вр)

«Я ніколи не дозволяв школі втручатися в мою освіту».

Марк Твен

11–1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d ?

11–2. У трапеції $ABCD$ основа $BC = 2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M , для якої $AB = AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

11–3. Задане деяке натуральне число $n > 1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n . Для кожного $n > 1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти.

11–4. Знайдіть найменше дійсне число M , для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \leq M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c таких, що $abc = 2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x , наприклад, $\{3,14\} = 0,14$.

11–5. Знайдіть усі функції $f: N \rightarrow N$ такі, що для довільних натуральних m та n число $(f(m))^2 + 2mf(n) + f(n^2)$ є квадратом цілого числа.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

11 клас (вр)

«Я ніколи не дозволяв школі втручатися в мою освіту».

Марк Твен

11–1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d ?

11–2. У трапеції $ABCD$ основа $BC = 2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M , для якої $AB = AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

11–3. Задане деяке натуральне число $n > 1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n . Для кожного $n > 1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти.

11–4. Знайдіть найменше дійсне число M , для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \leq M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c таких, що $abc = 2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x , наприклад, $\{3,14\} = 0,14$.

11–5. Знайдіть усі функції $f: N \rightarrow N$ такі, що для довільних натуральних m та n число $(f(m))^2 + 2mf(n) + f(n^2)$ є квадратом цілого числа.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів