Міністерство освіти і науки України
Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXIX Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв’язань задач

1 тур

Київ, 28 січня 2024 року

«Я ніколи не дозволяв школі втручатися в мою освіту».
Марк Твен

7 клас

7–1. Квадрат $ABCD$ розрізаний відрізком EF на два прямокутники $AEFD$ та $BCFE$. Кожний з цих двох прямокутників має сторони, що задаються натуральними числами. Відомо, що прямокутник $AEFD$ має площу 30 і вона більша за площу прямокутника $BCFE$. Знайдіть площу квадрата $ABCD$.

(Богдан Рубльов)

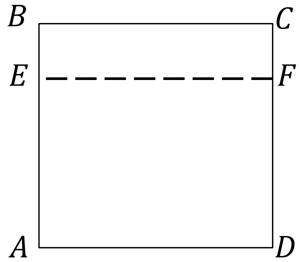

Рис. 1

Відповідь: 36.

Розв'язання. Розглянемо розклад числа 30 на натуральні множники:

$$30 = 30 \cdot 1 = 15 \cdot 2 = 10 \cdot 3 = 6 \cdot 5.$$

Очевидно, що більша сторона прямокутника $AEFD$ співпадає із стороною квадрата $ABCD$ (рис. 1). Із запропонованого розкладу числа 30 довжинами більшої та меншої сторонами прямокутника $AEFD$ можуть бути такі пари чисел: $(30, 1)$, $(15, 2)$, $(10, 3)$ та $(6, 5)$. Тоді довжинами сторін прямокутника $BCFE$ будуть такі пари: $(30, 29)$, $(15, 13)$, $(10, 7)$ та $(6, 1)$, оскільки сума менших сторін прямокутників $AEFD$ та $BCFE$ має дорівнювати їхній більшій стороні. Але з цих чотирьох можливих випадків лише в останньому прямокутник $AEFD$ є більшим за другий прямокутник. Таким чином – це єдина можливість. Звідси випливає, що сторона квадрата дорівнює 6 та його площа 36.

7–2. Чи можна вписати числа від 1 до 100 в клітинки квадрату 10×10 так, щоб у кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрату 10×10, були однієї парності? На рисунку показані приклади таких пар клітин, числа в яких мають мати однакову парність.

(Михайло Штанденко)

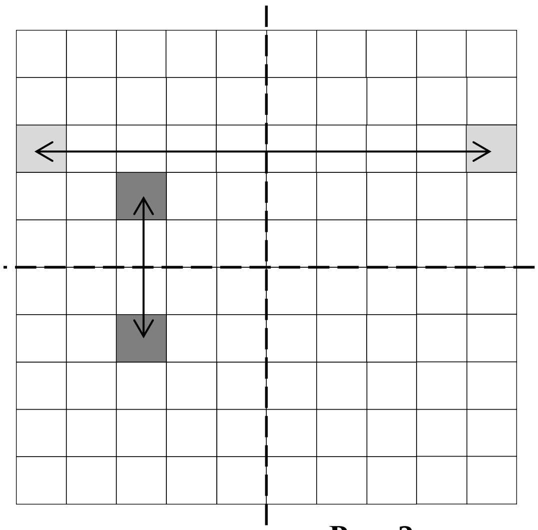

Рис. 2

Відповідь: Не можна.

Розв'язання. Припустимо, що можна, розглянемо один з варіантів. Розіб'ємо всі клітинки на четвірки, кожна з яких утворює прямокутник, кожні дві сусідні вершини якого симетричні відносно якогось з серединних перпендикулярів до початкового квадрату 10×10 (рис. 3). З умови випливає, що всі числа таких четвірок однієї парності. Значить кількість чисел кожної парності кратна 4. Проте всього у нас є 50 парних чисел та 50 непарних. Суперечність.

7–3. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до 2024 і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на 2024. Хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

(Михайло Штанденко)

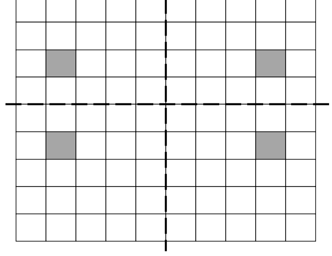

Рис. 3

Відповідь: Петрик.

Розв'язання. Оскільки $2024 = 2 \cdot 1012$, то Петрик пише на дошці число 1012. Після такого запису програє той гравець, що напише парне число на дошку. Запис будь-якого непарного числа до поразки не призводить. Але непарних чисел рівно 1012, тобто парна кількість. Таким чином першим виписувати непарні числа має Василь, а тому Петрик завжди буде мати змогу також написати непарне число. Таким чином вичерпаються усі непарні числа і максимум після 606-го свого ходу Василь має написати парне число і програє.

7–4. Для набору дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{200}$ будемо рахувати величину $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{199}a_{200} + a_{200}a_1$. За одну операцію можна змінити знак довільного числа набору, тобто поміняти a_i на $-a_i$, після чого знову рахуємо величину S для нових чисел. Якої найменшої кількості операцій гарантовано вистачить, щоб зробити величину S невід'ємною?

(Олексій Масалітін)

<u>Відповідь:</u> 50
<u>Розв'язання:</u> Припустимо, що $a_i = (-1)^i$ для всіх i. Тоді початкове значення суми дорівнює $200 \cdot (-1) = -200$. Тоді кожна операція змінює значення величини не більше ніж на 4, а значить кількість необхідних операцій, щоб зробити суму невід'ємною не менша за $\frac{200}{4} = 50$.

Доведемо, що нам завжди вистачить 50 операцій. Дійсно, поміняємо знаки чисел $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{100}$. Тоді величина дорівнюватиме

$$A = -a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_4 - \cdots - a_{100}a_{101} + a_{101}a_{102} + a_{102}a_{103} + \cdots + a_{199}a_{200} + a_{200}a_1.$$

Якщо $A \geq 0$, то нам вистачить 50 операцій. Якщо ж $A < 0$, поміняємо знаки чисел $a_{102}, a_{104}, a_{106}, \dots, a_{200}$. Тоді величина дорівнюватиме

$$B = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{100}a_{101} - a_{101}a_{102} - a_{102}a_{103} - \cdots - a_{199}a_{200} - a_{200}a_1.$$

Оскільки $B = -A$, маємо $B > 0$, тож нам вистачить 50 операцій.

7–3.1. Петрик розставив по колу в деякому порядку 15 знаків «плюс» та 15 знаків «мінус». Василь хоче замінити деякі із знаків на протилежні так, щоб не було двох однакових знаків, що стоять поруч. Доведіть, що він може цього досягнути, замінивши не більше ніж 14 знаків.

<u>Розв'язання</u>. Занумеруємо місця, на яких написані знаки. Василю слід зробити так, щоб на парних місцях були знаки одного типу, а на непарних – іншого. Подивимося на 15 непарних місць, без обмеження загальності вважатимемо, що там принаймні 8 знаків плюс. Тоді на парних місцях мінусів більше, тобто мінімум 8. Якщо Василь виправити знаки так, щоб на непарних місцях стояли плюси, а на парних мінуси, то йому доведеться виправити не більше $7 + 7 = 14$ знаків.

7–4.1. Петрик задумав 4 цілих числа, а далі виписав усі 6 їхніх попарних сум. П'ять з них виявились рівними 70, 110, 120, 180 та 230. Чому дорівнює шоста сума?

<u>Відповідь:</u> 190.
<u>Розв'язання</u>. Нехай задумані числа a, b, c та d. Тоді серед п'яти виписаних попарних сум є дві пари, сума чисел яких дорівнює $a + b + c + d$. Простим перебором бачимо, що тут існує єдиний варіант: $70 + 230 = 120 + 180 = 300$. Таким чином останнім числом має бути $300 - 110 = 190$. Далі вже неважко підібрати і самі числа, що задовольняють умову задачі. Хоча за умовами задачі цього не вимагається, але треба пересвідчитися, що вказана ситуація можлива. Задумані числа, можуть бути, наприклад, такими: $0, 70, 110$ та 120, які за умовою задачі можна було і не знаходити.

<u>8 клас</u>

8–1. Знайдіть кількість натуральних чисел, для яких добуток цифр та сума цифр однакові і дорівнюють 8.

<u>Відповідь:</u> 23.

***Розв'язання*.** Подивимося на можливі цифри числа.
Якщо там є цифра 8, то з добутку можуть бути ще цифри 1, а з суми – лише цифри 0, тому одночасно це неможливо, а тому таке число одне, що дорівнює 8.
Якщо там є цифра 4, то вона одна і ще є цифра 2, далі з добутку там можуть бути ще цифри 1, а їхня кількість має бути рівною 2, що випливає з суми. Таким чином таких чисел усього $4 \cdot 3 = 12$.
Якщо там немає цифр 8 та 4, то там є три цифри 2, що випливає з добутку, а також дві цифри 1, що випливає з суми. Кількість варіантів різних розташувань трьох цифр 2 у п'ятицифровому числі дорівнює 10, що неважко підрахувати простим перебором.
Остаточно таких чисел $1 + 12 + 10 = 23$.

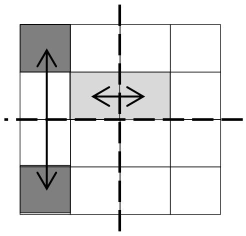

Рис. 4

8–2. Запишіть натуральні числа від 1 до 16 в клітинки квадрату 4×4 так, щоб в кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число було записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрату 4×4, дають в сумі просте число. На рисунку показані приклади таких пар клітин, суми чисел в яких мають бути простим числом.

(Михайло Штанденко)

Розв'язання. Один з прикладів показаний нижче на рис. 5.

1	**3**	**10**	**16**
5	**7**	**12**	**14**
8	**6**	**11**	**9**
2	**4**	**13**	**15**

Рис. 5

8–3. Коло γ, що проходить через вершину A трикутника ABC, перетинає його сторони AB та AC вдруге в точках X та Y відповідно. Також коло γ перетинає сторону BC у точках D та E так, що $AD = AE$. Доведіть, що точки B, X, Y, C лежать на одному колі.

(Михайло Штанденко)

***Розв'язання*.** Оскільки чотирикутники $XDEA$ та $ADEY$ – вписані, то (рис. 6)

$$\angle BXD = 180° - \angle AXD = \angle DEA = \angle ADE = \\ = 180° - \angle AYE = \angle EYC.$$

Отже,

$$\angle XBC + \angle XYC = (\angle XBD + \angle BXD) + (\angle XYC - \angle EYC) = \\ = 180° - \angle XDB + \angle XYE = \angle XDE + \angle XYE = 180°,$$

з чого і випливає шукана циклічність.

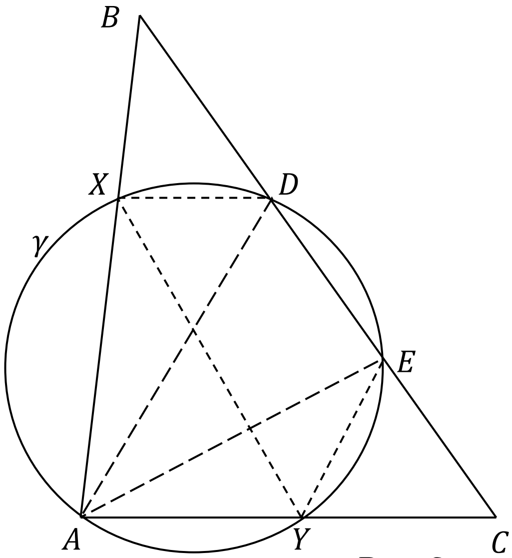

Рис. 6

8–4. Додатні дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ стоять по колу. Виявилось, що для довільного $i = 1, 2, \dots, 2024$ справджується умова: $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (тут вважаємо, що $a_{2025} = a_1$ та $a_{2026} = a_2$). Яка найбільша кількість натуральних чисел може бути серед цих чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$?

(Михайло Штанденко)

Відповідь: 1011
Розв'язання: Спершу покажемо, що не може бути двох послідовних чисел, що більше або дорівнюють 1. Дійсно, якщо $a_1, a_2 \geq 1$, то $a_3 > a_1 a_2 \geq a_1 \geq 1$, звідки, аналогічно, $a_4 > a_2 \geq 1, a_5 > a_3 \geq 1, \dots$. Отримаємо $a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2023} < a_1$, суперечність.
Отже, два натуральні числа не можуть йти поспіль, звідки їх не більше ніж 1012. Припустимо, що їх рівно 1012, тоді вони йдуть через одне. Без обмеження загальності, вони знаходяться на парних позиціях. Але тоді $a_{2i+1} > a_{2i} a_{2i-1} \geq a_{2i-1}$, і знову маємо $a_1 < a_3 < \dots < a_{2023} < a_1$, суперечність.
Таким чином натуральних чисел серед заданих не може бути більше 1011.

Приклад набору чисел, що містить 1011 натуральне число та задовольняє умови задачі, може бути таким:

$$a_2 = a_4 = \dots = a_{2022} = 1, a_1 = \frac{1}{2024}, a_3 = \frac{1}{2023}, \dots, a_{2023} = \frac{1}{1012}, a_{2024} = \frac{1}{1011}.$$

8–5. Знайдіть найменше натуральне число n, що має принаймні 7 натуральних дільників $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, $k \geq 7$, і для якого справджуються рівності:

$$d_7 = 2d_5 + 1 \text{ та } d_7 = 3d_4 - 1.$$

(Микита Харін)

Відповідь: 2024.

Розв'язання. З першого рівняння можна отримати, що d_7 є непарним, а тому з другого випливає, що d_4 є парним. Також оскільки кожен дільник деякого дільника є дільником, то d_i має не більш, ніж i дільників. Тому розглянемо наступні випадки.

- Нехай d_4 ділиться на 2 різні прості дільники p та q, причому $p < q$, тоді $1, p, q, pq$ є дільниками числа n та $d_4 \geq pq$. Тому $d_4 = pq$ та оскільки d_4 є парним, то $p = 2$. Тому з рівнянь маємо
$$d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = q, d_4 = 2q, d_7 = 6q - 1, d_5 = 3q - 1.$$

Оскільки q – непарне, то d_5 – парне, але не ділиться на єдиний простий дільник q, що менше d_5. Тому d_5 є степенем 2, що більший за 4. Але серед дільників, що йдуть до d_5, немає 4. Тому цей випадок неможливий.

- Нехай d_4 є степенем простого числа, а оскільки d_4 – парне, то степенем двійки. Очевидно, d_4 не може дорівнювати 1 або 2. Також d_4 не може дорівнювати 16 та більше, бо тоді d_4 мало б хоча б 5 дільників: $1, 2, 4, 8$ та 16. Тому d_4 може дорівнювати лише 4 або 8. Якщо $d_4 = 4$, то $d_3 = 3$, та з рівнянь маємо:
$$d_7 = 11, d_5 = 5.$$

Але між d_5 та d_7 є 2 дільники: 6 та 10. Отримали суперечність.

Тому $d_4 = 8$ та $d_7 = 23$, $d_5 = 11$. Оскільки ці числа є взаємно простими, то n не менше $8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$. Зокрема, число 2024 задовольняє умові. Для цього випишемо його перші 7 дільників у порядку зростання: $1, 2, 4, 8, 11, 22, 23$.
Перевіркою пересвідчуємося, що дільники задовольняють заданим умовам.

8–4.1. Знайдіть усі пари дійсних чисел x, y, що задовольняють рівності:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) = 0.$$

Відповідь: (x, y): $\left(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$ та $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) = (xy + 1)^2 + (x + y - 2)^2 = 0.$$

Звідси випливає, що одночасно мають справджуються рівності $xy + 1 = 0$ та $x + y - 2 = 0$. Тоді

$$x(2 - x) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right) = 0,$$

тобто або $x = 1 + \sqrt{2}$ та $y = 1 - \sqrt{2}$, або $x = 1 - \sqrt{2}$ та $y = 1 + \sqrt{2}$. Неважко переконатися, що обидві відповіді задовольняють умові задачі.

8–5.1. Натуральні числа a, b, c задовольняють рівності: $10a^2 - 3ab + 7c^2 = 0$. Яке найменше значення може приймати вираз $(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)$?
Тут через (x, y) позначений найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y.

Відповідь: 3.

Розв'язання. Оскільки $10a^2 + 7c^2 = 3ab$ – ділиться націло на 3, тому й

$$a^2 + c^2 = (10a^2 + 7c^2) - 6 \cdot (a^2 + c^2)$$

також ділиться націло на 3. Але тоді кожне з чисел a та c ділиться на 3, звідки маємо, що $(a,c) \geq 3$. Якщо тепер вибрати $a = c = 3$ та $b = 17$, то вони задовольняють задану рівність, а крім того для цього набору $(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a) = 3$ – мінімальне можливе значення.

9 клас

9–1. Різницю дробів $\frac{2024}{2023} - \frac{2023}{2024}$ подаємо у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$. Знайдіть значення p.

Відповідь: 4047.
Розв'язання. Розглянемо для довільного натурального n різницю:
$$\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$
Покажемо, що $p = 2n+1$, тобто дріб $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ не скоротній. Очевидно, що n та $n+1$ взаємно прості. Припустимо, що n та $2n+1$ мають спільний дільник d. Тоді і їхня різниця ділиться на d, тобто на d ділиться число $2n+1-n = n+1$. Таким чином $d = 1$. Аналогічно показується й що числа $2n+1$ та $n+1$ взаємно прості. Таким чином нескоротність дробу доведена, а тому $p = 2n+1$.

9–2. У гострокутному трикутнику ABC-проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK ΔALB ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$.

(Рожкова Марія)

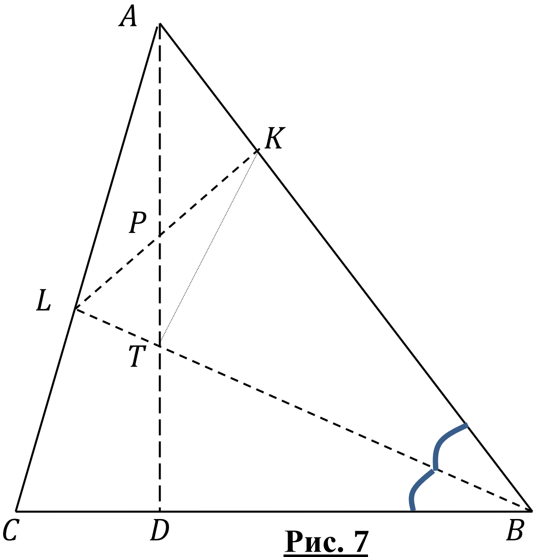

Рис. 7

Розв'язання. Позначимо $P = LK \cap AD$ (рис. 7). З прямокутного ΔLKB маємо, що $\angle KLT = 90° - \beta$, де $\angle ABC = 2\beta$. Тоді
$$\angle LTP = \angle DTB = 90° - \beta = \angle KLT.$$
Таким чином $PT = PL = PK$, звідки випливає, що медіана PT у двічі менша за основу LK, а тому ΔLKT – прямокутний, тобто $KT \perp TL$, що й треба було довести.

9–3. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до 2023 і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на 2023. Хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

(Михайло Штанденко)

Відповідь: Петрик.
Розв'язання. Оскільки $2023 = 17 \cdot 119$, то Петрик пише на дошці число 119. Після такого запису програє той гравець, що напише на дошку число, що кратне 17. Запис будь-якого іншого числа до поразки не призводить. Чисел, що не кратні 17, рівно $2023 - \left[\frac{2023}{17}\right] = 1904$, тобто парна кількість (помітимо, що вже виписане число $119 = 7 \cdot 17$ до них не відноситься). Таким чином першим виписувати ці числа, щоб не програти, має Василь, а тому Петрик завжди буде мати змогу також написати аналогічне число. Таким чином вичерпаються усі числа, що не кратні 17, і після свого чергового ходу Василь має написати число, що ділиться на 17 і програє.

9–4. Задача 8-4

9–5. Для натуральних чисел (m, n) знайдіть найменше значення виразу $|253^m - 40^n|$.

(Олексій Масалітін)

Відповідь: 9.

Розв'язання. Якщо $m = 2, n = 3$, то даний вираз дорівнює $|253^m - 40^n| = |64009 - 64000| = 9$. Припустимо, що $|253^m - 40^n| < 9$. Очевидно, що це число є непарним, а також воно кратне 3, бо $253^m \equiv 40^n \equiv 1(3\ )$. Таким чином, єдиний можливий варіант це $|253^m - 40^n| = 3$. Помітимо, що $40^n \vdots 8$, а 253^m має давати остачу $\pm 3(8\ ) \Rightarrow m$ є непарним. Тоді $253^m \equiv (-3)^m \equiv 5(8\ )$. З цього ми можемо зрозуміти, що $|253^m - 40^n| = 40^n - 253^m = 3$. Тоді $n > 1$ та $40^n \vdots 16$. Таким чином $253^m \equiv -3(16\ )$, що означає $(-3)^m \equiv -3(16\ )$ або $(-3)^m + 3 \equiv 0(16\ ) \Rightarrow$ з періодичності остач отримуємо, що $m = 4k + 1$. З цього ми отримуємо

$$40^n - 253^m \equiv -253^m \equiv -3^m \equiv -3^{4k+1} \equiv -3 \cdot 81^k \equiv -3 \equiv 2(5\ )$$

звідки й отримуємо суперечність, що завершує доведення.

9–4.1. Петрик задумав 4 цілих числа, а далі виписав усі їхні попарні суми. П'ять з них виявились рівними 70, 110, 120, 180 та 230. Знайдіть усі четвірки таких чисел, які задовольняють ці умови.

Відповідь: $0, 70, 110, 120$ та $30, 40, 80, 150$, а також усі їхні перестановки.

Розв'язання. Нехай задумані числа a, b, c та d. Тоді серед п'яти виписаних чисел є дві пари, сума чисел яких дорівнює $a + b + c + d$. Простим перебором бачимо, що тут існує єдиний варіант: $70 + 230 = 120 + 180 = 300$. Таким чином останнім числом має бути $300 - 110 = 190$. Далі вже неважко підібрати і самі числа, що задовольняють умову.

Якщо вважати, що $a \le b \le c \le d$, то $a + b = 70$, $a + c = 110$, $b + d = 190$ та $c + d = 230$. Тоді легко отримати, що $b = 70 - a$, $c = 110 - a$ та $d = 120 + a$.

Тепер зрозуміло, що можливі два варіанти: $a + d = 120$ або $a + d = 180$. Оскільки $a + d = 120 + 2a$, то маємо дві можливі відповіді.

$120 + 2a = 120 \Rightarrow$ та $a = 0$ і відповідна четвірка чисел 0,70,110,120.

$120 + 2a = 180 \Rightarrow$ та $a = 30$ і відповідна четвірка чисел 30,40,80,150.

9–5.1. Знайдіть усі такі натуральні числа m та n, для яких обидва дроби $\frac{2m-1}{n}$ та $\frac{2n-1}{m}$ є цілими числами.

Відповідь: (m, n): (1,1), (3,5) та (5,3).

Розв'язання. Для пари (m, n), що задовольняють умову, маємо: $2m - 1 = sn$, $2n - 1 = tm \Rightarrow 4m - 2 = s(2n) = s(mt + 1)$. Тоді $m(4 - st) = s + 2$ і аналогічно $n(4 - st) = t + 2$. Оскільки $s + 2 > 0$, то $4 > st$. Таким чином залишилося перебрати декілька випадків.

$st = 1 \Rightarrow s = t = 1 \Rightarrow m = n = 1$.

$st = 2$ – оскільки обидві змінні s, t задають непарне число, то це не можливо.

$st = 3 \Rightarrow s = 3, t = 1$ (або навпаки) $\Rightarrow m = 3, n = 5$ або $m = 5, n = 3$.

10 клас

10–1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких число $4b - 1$ ділиться націло на число $3a + 1$, а число $3a - 1$ ділиться націло на число $2b + 1$.

Відповідь: $(a, b) = (2, 2)$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $4b - 1 = k(3a + 1)$ та $3a - 1 = n(2b + 1)$ для деяких натуральних чисел k та n. Перемножимо ці дві рівності та розкриємо дужки:

$$(4b - 1)(3a - 1) = kn(3a + 1)(2b + 1)\ \Rightarrow$$

$$12ab - 4b - 3a + 1 = kn(6ab + 3a + 2b + 1)\ \Rightarrow 12ab > kn6ab\ \Rightarrow 2 > kn.$$

Таким чином добуток натуральних чисел kn менше за 2, тому вони обидва дорівнюють 1. Таким чином ми маємо систему двох рівнянь:

$$4b - 1 = 3a + 1, 2b + 1 = 3a - 1 \ \Rightarrow a = b = 2.$$

10–2. Задача 9-2.

10–3. На острові живуть 2025 людей, кожний з яких є або лицарем, тобто завжди каже правду, або брехуном, тобто завжди бреше. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого, але не більше трьох. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два брехуни.

а) Яка найменша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

б) Яка найбільша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

(Олексій Масалітін)

Відповідь: ***а)*** 1, ***б)*** 1215.

Розв'язання. ***а)*** Якщо серед мешканців острова усі брехуни, то оскільки мешканців острова непарна кількість, то принаймні в одного кількість знайомих парна. З умов задачі випливає, що їх рівно 2. Якщо вони обидва брехуни, то він сказав правду, але був брехуном. суперечність.

Покажемо, що на острові може бути рівно 1 лицар. Розіб'ємо 2022 брехунів на пари знайомих, а остання трійка з двох брехунів та 1 лицарем так само знайомі поміж собою. Тоді усі умови задачі справджуються. Лицар має знайомими двох брехунів – тому каже правду, брехуни не більше 1 знайомого брехуна – тому брешуть.

б) Позначимо кількість лицарів на острові через k. Тоді кожен з них має двох знайомих брехунів. Це означає, що сумарна кількість знайомств виду «лицар-брехун» дорівнює $2k$. Оскільки кожен з брехунів має не більш ніж трьох знайомих лицарів, кількість брехунів не менша за $\frac{2}{3}k$. Тоді всього на острові не менше ніж $\frac{5}{3}k$ мешканців, звідки $\frac{5}{3}k \leq 2025 \Rightarrow k \leq 1215$.

Покажемо, що можлива ситуація, коли лицарів рівно 1215. Розіб'ємо 2025 мешканців острову на групи по 5. В кожній з груп нехай троє є лицарями, а двоє – брехунами, причому лицарі знайомі лише з цими брехунами і навпаки. В такому випадку всі лицарі мають двох знайомих брехунів (значить вони сказали правду), а всі брехуни – жодного (значить вони збрехали), тобто цей приклад задовольняє умові задачі. Залишилось помітити, що кількість лицарів в цьому прикладі дорівнює $\frac{3}{5}$ від загальної кількості, тобто 1215.

10–4. Чи існує для натурального числа n така перестановка усіх його натуральних дільників $(d_1, d_2, \dots d_k)$, що рівняння $d_k x^{k-1} + \dots + d_2 x + d_1 = 0$ має раціональний корінь, якщо:

а) $n = 2024$; ***б)*** $n = 2025$?

(Микита Харін)

Відповідь: ***а)*** так існує, ***б)*** ні, не існує.

Розв'язання. ***а)*** Наприклад, для перестановки

$$(11, 1, 22, 2, 44, 4, 88, 8, 253, 23, 506, 46, 1012, 92, 2024, 184),$$

яка побудована таким чином, що за дільником $11k$ йде дільник k. Тоді маємо

$$184x^{15} + 2024x^{14} + 92x^{13} + 1012x^{12} + 46x^{11} + 506x^{10} + 23x^9 + 253x^8 +$$
$$+8x^7 + 88x^6 + 4x^5 + 44x^4 + 2x^3 + 22x^2 + x + 11 =$$
$$(x + 11)(184x^{14} + 92x^{12} + 46x^{10} + 23x^8 + 8x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1),$$

а тому це рівняння має раціональний корінь $x = -11$.

Загалом, якщо для числа n є простий дільник p, для якого справджується умова $n = pm$ та m не ділиться на p, то позначимо дільники числа m у порядку зростання мають таким чином:

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = m.$$

Тоді усі дільники числа n розбиваються на пари (pd_i, d_i), $i = \overline{1,k}$. Якщо тепер розглянути перестановку дільників, де сусідніми елементами перестановки є елементи відповідної пари – на непарній та парній позиції відповідно, наприклад, $(pd_1, d_1, pd_2, d_2, \ldots, pd_k, d_k)$. Тоді у побудованому многочлені елементи кожної пари утворюють такий двочлен:

$$d_i x^{2i} + pd_i x^{2i-1} = dx^{2i-1}(x+p).$$

Таким чином многочлен, що утворений як сума таких двочленів, напевно матиме корінь $x = -p$.

б) Припустимо, що така перестановка існує та саме рівняння має раціональний розв'язок $\frac{s}{t}$, причому НСД$(s,t) = 1$. Перепишемо рівність в наступному вигляді $d_k s^{k-1} + d_{k-1}s^{k-2}t + \cdots + d_2 st^{k-2} + d_1 t^{k-1} = 0$. Помітимо, що кожний дільник є непарним, тому якщо t було б парним, то й число $d_k s^{k-1}$ те ж було б парним, тому s^{k-1}, а отже s є парним, що суперечить тому, що s та t є взаємно простими. Тому t та, аналогічно, s є непарними. Також число $2025 = 45^2$ є точним квадратом, а тому має непарну кількість дільників. Тому число $d_k s^{k-1} + d_{k-1}s^{k-2}t + \cdots + d_2 st^{k-2} + d_1 t^{k-1}$ є сумою непарної кількості непарних доданків, а отже само є непарним і не може дорівнювати 0. Отримана суперечність показує, що шуканої перестановки не існує.

10–5. Знайдіть найменше дійсне число M, для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \le M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c, таких що $abc = 2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x: наприклад, $\{3{,}14\} = 0{,}14$.

(Федір Юдін, Антон Тригуб)

Відповідь: $2 + \frac{2024}{2025}$.

Розв'язання. Спершу покажемо, що менші значення M не підходять. Дійсно, виберемо $b < 1$ дуже близьке до 1 і $c < 2025$ дуже близьке до 2025. Тоді $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ як завгодно близькі до $\frac{2024}{2025}, 1, 1$ відповідно, а тому їх сума може бути як завгодно близькою до $2 + \frac{2024}{2025}$.

Тепер припустимо, що для деяких a, b, c з $abc = 2024$ виконується $\{a\} + \{b\} + \{c\} > 2 + \frac{2024}{2025}$. Без обмеження загальності, $a \le b \le c$.

Лема. Нехай $a \le b$ - два додатні дійсні числа. Нехай $a_1 = \frac{ab}{\lceil b \rceil}$. Тоді $\{a_1\} \ge \{a\} + \{b\} - 1$.

Доведення. Позначимо $b_1 = \lceil b \rceil$. Помітимо, що $a_1 b_1 = ab$, а також $a_1 \le a \le b \le b_1$. З методу Штурму звідси випливає, що $a_1 + b_1 \ge a + b$. Покажемо це явно:

$$a_1 + b_1 \ge a + b \Leftrightarrow \frac{ab}{b_1} + b_1 \ge a + b \Leftrightarrow ab + b_1^2 \ge ab_1 + bb_1 \Leftrightarrow (b_1 - a)(b_1 - b) \ge 0.$$

Отже, $a_1 + b_1 \ge a + b \Rightarrow b_1 - b \ge a - a_1$. Помітимо, що $b_1 - b = 1 - \{b\}$ (або 0, якщо b ціле, тоді $a_1 = a$ і лема очевидно виконується), а

$$a - a_1 = ([a] + \{a\}) - ([a_1] + \{a_1\}) \ge \{a\} - \{a_1\}.$$

Отже, маємо $1 - \{b\} \ge \{a\} - \{a_1\}$, що й вимагалось довести.
Лема доведена.

Повернемось до задачі. Нехай $b_1 = \frac{bc}{\lceil c \rceil}$, тоді $\{a\} + \{b_1\} \ge \{a\} + \{b\} + \{c\} - 1$. Тепер розглянемо число $t = \frac{ab_1}{\max(\lceil a \rceil, \lceil b_1 \rceil)}$, маємо $\{t\} \ge \{a\} + \{b_1\} - 1$. При цьому всьому, $t = \frac{2024}{n}$ для якогось натурального числа n (а саме для $n = \lceil c \rceil \max(\lceil a \rceil, \lceil b_1 \rceil)$, але нам це неважливо). Тоді $\{t\} \le \frac{2024}{2025}$: очевидно при $n \ge 2025$, а при $n \le 2024$ знаменник $\{t\}$ буде не більшим за 2024 і тоді також $\{t\} \le 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2025}$.

Отже, $\{a\} + \{b\} + \{c\} \le \{a\} + \{b_1\} + 1 \le \{t\} + 2 \le 2 + \frac{2024}{2025} = M$.

10–4.1. Є 315 монет, що поділені на 3 купки з 81, 115 та 119 монет. За один крок можна поєднати разом декілька існуючих купок або купку, що має парну кількість монет поділити на дві рівні купки. Чи можна за скінченну кількість кроків утворити 315 купок, в кожній з яких рівно 1 монета?

Відповідь: ні.
Розв'язання. Якщо усі купки містять кількість монет, що мають однаковий непарний простий дільник p, то цей дільник буде вже ділити кількість монет в усіх наступних купках. Зрозуміло, що з самого початку не можливо зробити ділення купок навпіл, а лише поєднання певної пари купок в одну, тому матимемо після першого ходу такі можливі варіанти: $(81{,}234)$ – спільний дільник 3, $(115{,}200)$ – спільний дільник 5 або $(119{,}196)$ – спільний дільник 7. Це й завершує доведення неможливості такого поділу.

10–5.1. Петрик мав необмежену кількість жовтої та синьої фарби. У дволітрову банку він налив 1 л жовтої та 1 л синьої фарби, які рівномірно перемішалися між собою, утворивши єдину суміш. За один крок Петрик виливає 1 л суміші з банки та доливає в банку 1 л жовтої або 1 л синьої фарби. Після n таких кроків відсоток синьої фарби в отриманій суміші мав значення між 83% до 84%. Для якого найменшого значення n це могло статися? Перша дія Петрика, коли він злив вперше разом 1 л жовтої та 1 л синьої фарби не рахується.

Відповідь: 6.
Розв'язання. Після кожного кроку рахуючи нульовий, коли з банки відливається 1 л суміші, кількість синьої фарби визначається чином такого вигляду: $\frac{2a-1}{2^{k+1}}$, де k – кількість кроків, $2a-1$ – непарне число, що задовольняє умови: $1 < 2a-1 < 2^{k+1}$. Після нульового кроку ми маємо розподіл $\frac{1}{2}$, тобто умова задовольняється. Якщо після k-го кроку маємо такий розподіл, то після $(k+1)$-го там буде один з двох варіантів: $\frac{\frac{2a-1}{2^{k+1}}+0}{2} = \frac{2a-1}{2^{k+2}}$ або $\frac{\frac{2a-1}{2^{k+1}}+1}{2} = \frac{2a-1+2^{k+1}}{2^{k+2}}$. Так можна з'ясувати для відповідного раціонального числа від 0 до 1, коли воно може з'явитися.
Тепер знайдемо число з найменшим знаменником у вигляді 2^k, для якого існує відповідний дріб між числами $\frac{83}{100}$ та $\frac{84}{100}$. Підбором знаходимо, що то число $\frac{107}{128} = \frac{107}{2^7}$. Таким чином шуканий відсоток можна отримати після 6-го кроку. Покажемо, в якому порядку треба робити доливання тієї чи іншої фарби. Нехай доливалася така кількість синьої фарби: a_0, a_1, …, a_6, де $a_i = 0$ (доливається жовта фарба) або $a_i = 1$ (доливається синя фарба). Для зручності вважаємо, що на початку в банці є 1 л жовтої фарби, тоді шукане відношення отримується таким чином:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{a_0}{2}+a_1}{2}+a_2}{2}+\cdots}{\cdots}+a_6}{2} = \frac{a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^6a_6}{2^7} = \frac{107}{2^7}.$$

Залишається знайти двійковий розклад числа $107 = 64+32+8+2+1$, звідки знаходимо, що $a_0 = a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = 1$.

11 клас

11–1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d?

Відповідь: 10.

Розв'язання. Перепишемо умову задачі таким чином:

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4} \Rightarrow 8(a+b+c)=3(a+b+c+d) \Rightarrow 5(a+b+c)=3d.$$

Таким чином найменше можливе значення d буде при найменших можливих значення a, b, c. Якщо вибрати найменші можливі, тобто $a=1, b=2, c=3$ знайдемо шукане найменше значення $d=10$.

11–2. У трапеції $ABCD$ основа $BC=2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M, для якої $AB=AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

(Богдан Рубльов)

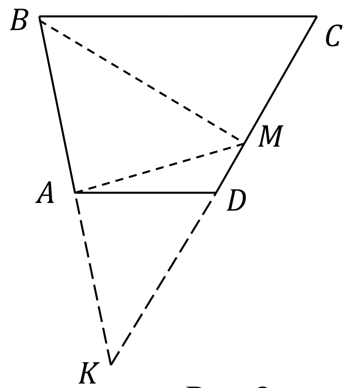

Рис. 8

Розв'язання. Продовжимо сторони AB та CD до перетину в точці K. Тоді у ΔKBC відрізок AD – середня лінія, оскільки вона паралельна основі та у двічі менша, тому $AB=AK=AM$ (рис. 8). Таким чином у ΔBMK медіана у двічі менша за сторону до якої проведена, з відомих властивостей, цей трикутник прямокутний, тобто $BM \perp CD$, що й треба було довести.

11–3. Задане деяке натуральне число $n>1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n. Для кожного $n>1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти.

(Михайло Штанденко, Антон Тригуб)

Відповідь: Василь перемагає, якщо n є добутком попарно різних непарних простих чисел, інакше перемагає Петрик.

Розв'язання. Розберемо такі випадки.

Якщо $n=4k$, то Петрик першим ходом виписує число $2k$. Тоді програє той, хто першим вибере парне число. Встого лишилось $2k$ непарних чисел. Отже, через k ходів непарні числа вичерпаються, і Василь муситиме записати першим парне число, а тому й програє

Якщо $n=4k+2$, то Петрик першим ходом виписує число $2k+1$. Тоді, знову ж, програє той, хто першим вибере парне число. Всього лишилось $2k$ непарних чисел, тому Василь також програє.

Якщо n – непарне та ділиться на p^2, де p – просте число. Тоді Петрик першим ходом виписує число $\frac{n}{p}$. Програє той, хто першим вибере число, що ділиться на p. Всього лишилось $\frac{n}{p}-1$ таких чисел – парна кількість, оскільки одне подібне число $\frac{n}{p}$ вже виписане. Тоді залишилась парна кількість допустимих чисел. Тому Василь також програє.

Останній випадок, якщо n є добутком кількох (можливо одного) попарно різних непарних простих чисел: скажімо, $n=p_1p_2\dots p_k$. Тоді Василь діє за такою стратегією. Перед його ходом, якщо Петрик ще не програв після свого останнього ходу, то добуток вибраних на даний момент чисел не ділиться на деяке p_i. Таким чином не виписане жодне з чисел, що кратні p_i, а загальна їхня кількість $\frac{n}{p_i}$ – непарна. Тому чисел, що не кратні p_i – парна кількість, а саме $n-\frac{n}{p_i}$. На дошку виписувалися лише такі числа і першим їх виписував Петрик, тому для Василя завжди знайдеться ще невиписане таке число, бо кількість вже виписаних чисел для Василя завжди непарна. Отже, Василь завжди може зробити хід, що не призводить до поразки, а тому він переможе, бо гра, очевидно, має завершитися поразкою одного з гравців.

11–4. Задача 10-5.

11–5. Знайдіть усі функції $f\colon N \to N$ такі, що для довільних натуральних m та n число
$$\left(f(m)\right)^2 + 2mf(n) + f(n^2)$$
є квадратом цілого числа.

(Федір Юдін)

<u>Відповідь</u>: $f(n) = n$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $P(m, n)$ позначає твердження з умови задачі.
Розглянемо підстановку $P(1, 1)$: тоді $f(1)^2 + 3f(1)$ є точним квадратом. Оскільки для $t > 1$ маємо
$$(t+1)^2 < t^2 + 3t < (t+2)^2,$$
а тому $f(1)^2 + 3f(1)$ може бути квадратом натурального числа лише за умови, що $f(1) = 1$. Нехай p – непарне просте число. Тоді з підстановки $P\left(\frac{p-1}{2}, 1\right)$ маємо, що $\left(f\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)^2 + p = a^2$ для деякого натурального числа a. Тоді $p = \left(a - f\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)\left(a + f\left(\frac{p-1}{2}\right)\right)$, отож $a - f\left(\frac{p-1}{2}\right) = 1$ та $a + f\left(\frac{p-1}{2}\right) = p$, звідки $f\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p-1}{2}$. Отже, існують як завгодно великі натуральні числа k такі, що $f(k) = k$. Оберемо таке значення k та для довільного натурального числа n розглянемо підстановку:
$$P(k, n)\colon k^2 + 2kf(n) + f(n^2) = \left(k + f(n)\right)^2 + f(n^2) - f(n)^2 = b^2$$
Для деякого натурального числа b. Таким чином при фіксованому натуральному значенні n справджується рівність:
$$f(n^2) - f(n)^2 = b^2 - \left(k + f(n)\right)^2,$$
тобто ненульове число представляється як різниця квадратів нескінченною кількістю способів, що неможливо. Тому має справджуватися рівність $f(n^2) = \left(f(n)\right)^2$ для довільного натурального n.
Далі з підстановки $P(m, k)$, де m – довільне натуральне число, випливає, що
$$P(m, k)\colon \left(f(m)\right)^2 + 2mf(k) + f(k^2) = \left(f(m)\right)^2 + 2mk + k^2 = (m+k)^2 + f(m)^2 - m^2 = c^2$$
Для деякого натурального числа c. З аналогічних міркувань, $\left(f(m)\right)^2 = m^2$, а тому $f(m) = m$ для усіх натуральних чисел m.

11–4.1. Задача 10-5.1.

11–5.1. Функції $f\colon N \to N$ та $g\colon N \to N$ визначаються таким чином: для кожного $n \in N$ $f(n)$ – найменше натуральне число, факторіал якого ділиться націло на n, а $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Доведіть, що функція g необмежена.

<u>Розв'язання</u>. Зрозумілі такі властивості функції f: $f(n) \le n$; якщо p – простий дільник числа n, то $f(n) \ge p$ та $f(n!) = n$.
Виберемо довільне натуральне K та покажемо, що існує N, для якого $g(N) \ge K$. Виберемо таке просте число p, що для нього наступне просте число не менше ніж $p + K$. Тоді $f(p!) = p$. Оскільки $p! + 1$ – взаємно просте з $p!$, то це число повинно мати простий дільник, який строго більше ніж p, а отже не менший ніж $p + K$. Тому
$$f(p!+1) \ge p + K \Rightarrow g(p!) = f(p!+1) - f(p!) \ge K.$$