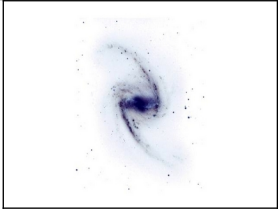


Обласна олімпіада з астрономії м. Львів, 10 лютого 2024 р.		11 клас
---	---	----------------

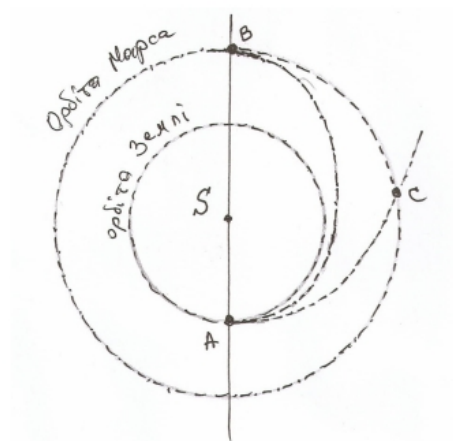
2. Політ на Марс. Космічний корабель рухається по земній орбіті з радіусом $R_1 = 1$ а.о. Для польоту до Марса вибрано 2 траєкторії: еліптична АВ і параболічна АС. У момент старту з точки А вектор швидкості корабля перпендикулярний до радіус-вектора SA. Після короточасного розгону рух корабля відбувається за інерцією (без тяги). Орбіти Землі і Марса вважати коловими ($R_1 = 1$ а.о., $R_2 = 1.52$ а.о.).

Порівняти енергетичні затрати на розгін корабля у двох випадках. Порівняти час руху корабля по двох траєкторіях.

Вказівка. Час руху від перицентру за параболічною траєкторією можна визначити за формулою Баркера:

$$t_p \sqrt{GM_\odot} = \frac{1}{3} p^{3/2} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \left(2 \frac{r}{p} - 1 \right)^{1/2},$$

де p - фокальний параметр параболи, r - віддаль точки траєкторії від фокуса.



(15 балів)

Розв'язання

1. Еліптична траєкторія.

Стартову швидкість при русі за еліптичною траєкторією можна визначити із законів збереження енергії і моменту імпульсу:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mGM_\odot}{R_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mGM_\odot}{R_2}; \quad mv_1 R_1 = mv_2 R_2, \quad (1)$$

де v_1 - стартова швидкість у т. А, R_1 - радіус земної орбіти; v_2 - швидкість корабля у т. В, R_2 - радіус орбіти Марса. З рівнянь (1) знаходимо:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_1}} \cdot \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} \approx 32.95 \text{ км/с.}$$

Швидкість по коловій орбіті дорівнює $v_0 = \left(\frac{GM_{\odot}}{R_1}\right)^{1/2} \approx 30 \text{ км/с,}$
на розгін потрібна енергія

$$E_1 = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_0^2) = m \cdot 92.8 \text{ (км/с)}^2.$$

Час руху знаходимо із закону Кеплера

$$\frac{T_e}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_{\odot}}}, \quad (2)$$

де T_e - період руху по еліпсу; $a = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$.
орбіті

Для руху Землі по

$$\frac{T_3}{R_1^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_{\odot}}}. \quad (3)$$

Із формул (2) і (3) одержуємо, що

$$T_e = \left(\frac{a}{R_1}\right)^{3/2} = \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1}\right)^{3/2} \text{ року.}$$

Час руху корабля до Марса

$$t_e = \frac{1}{2} T_e = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1}\right)^{3/2} \text{ року} \approx 258 \text{ діб.}$$

2. Параболічна траєкторія.

Стартова швидкість для руху по параболі

$$v_p = \sqrt{2}v_0 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_1}} \approx \sqrt{2} \cdot 30 \text{ км/с.}$$

На розгін потрібна енергія

$$E_2 = \frac{m}{2} (2v_0^2 - v_0^2) = \frac{mv_0^2}{2} \approx m \cdot 450 \text{ (км/с)}^2.$$

Відношення

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{v_0^2}{v_1^2 - v_0^2} \cong \frac{450}{92.85} \cong 4.85.$$

Час руху за параболічною орбітою

$$t_p = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{R_1}{v_0} \left(1 + \frac{R_2}{2R_1}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^{1/2}.$$

Враховуючи формулу (3), маємо

$$t_p = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(1 + \frac{R_2}{2R_1}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^{1/2} \text{ років.}$$

$$t_p \cong 0.19 \text{ року} \approx 69 \text{ діб.}$$

Відношення

$$\frac{t_e}{t_p} \cong 3.74.$$