ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

18 січня – 19 січня 2025 року, м.Львів

7 клас

1. Яку найменшу кількість розрізів треба зробити, щоб розділити 7 однакових пампухів порівну між вісьмома дітьми?

Відповідь: 11. *Розв'язок.* Оскільки $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, то мінімальна кількість розрізів дорівнює 11 (чотири пампухи потрібно розрізати навпіл – чотири рази по 1 розрізу, два пампухи на чотири однакові частини – двічі по 2 розрізи, і один пампух на вісім однакових частин – двома вертикальними і одним горизонтальним розрізом).
Відповідь обгрунтувати.

2. Старий пастух заповів синам поділити стадо так, щоб старшому синові дісталося не менше половини стада, середньому – не менше третини, а молодшому – не менше дев'ятої частини. Коли батько помер, виявилося, що в стаді 17 корів. Чи зможуть сини виконати заповіт батька?
Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: Так. *Розв'язок.* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$. Взявши відповідно 9, 6 і 2 корови, Сини виконають заповіт батька, якщо візьмуть $9, 6$ і 2 корови, відповідно, позаяк $9=\frac{18}{2}>\frac{17}{2}$, $6=\frac{18}{3}>\frac{17}{3}$, а $2=\frac{18}{9}>\frac{17}{9}$.

3. У Олега було 20 справжніх монет і 25 фальшивих. Одну монету він загубив. Є різноваги, які показують на скільки грам одна чаша ваги переважує іншу. Як за допомогою одного зважування визначити, яка монета загубилась, якщо фальшива монета легша на 1 грам за справжню?

Розв'язок. Не важко зрозуміти, що якщо на чашки ваги покласти по 22 монети, то у випадку, коли загубилась фальшива монета різниця ваг завжди буде парною, а у випадку, коли загубилась справжня монета, то різниця ваг буде завжди непарною.

4. Семикласник Петрик перемножив всі натуральні числа від року свого народження до 2025. Потім він обчислив суму цифр отриманого числа, далі знову обчислив суму цифр отриманої суми і так далі, доки не вийшло одноцифрове число 3. Чи не помилився Петрик в обчисленнях? Відповідь обгрунтуйте.

Відповідь: Так, помилився.*Розв'язок.* Оскільки 2025 ділиться не тільки на 3, але і на 9, то і отриманий добуток ділиться на 9. Але, тоді сума цифр цього добутку, а, отже, сума цифр отриманої суми і т.д. повинна ділитися на 9. Проте, 3 на 9 не ділиться.

5. Розглянемо всі чотиризначні натуральні числа, що діляться на 42, а дві середні цифри в них 42. Цю умову задовольняє, наприклад, число 1428. Чи є ще інші такі числа? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: 1428 і 6426.*Розв'язок.* Зауважимо, що чотиризначне число вигляду $\overline{x42y}$ ділиться на 42, якщо на 42 ділиться число $\overline{x00y}$. Серед таких чисел є лише п'ять, що діляться на 7, позаяк на 7 ділиться 1001. Такими числами є 8001, 1008, 8008, 6006. Але на 2 і на 3 ділиться лише числа 1008, 6006. Отже шукані числа – 1008+420=1428 і 6006+420=6426.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

18 січня – 19 січня 2025 року, м.Львів

8 клас

1. Дійсне число x задовольняє рівняння $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$. Чому дорівнює значення виразу $x^{11} - 7x^7 + x^3$?

Відповідь: 0. **Розв'язок.** Підносимо обидві сторони рівності $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ до квадрату $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5$. Звідси, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ і знову підносимо до квадрату $x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 9$, тому $x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$. Якщо з виразу з умови винести x^7, то отримаємо $x^7(x^4 - 7 + \frac{1}{x^4})$. Позаяк $x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$, остаточно отримуємо $x^{11} - 7x^7 + x^3 = 0$.

2. Найбільше просте число, що є дільником числа 16384 є 2, бо $16384 = 2^{14}$, а числа 34 є 17, бо $34 = 2 \cdot 17$. Яка сума цифр найбільшого простого числа, яке є дільником числа 16383 ?

Відповідь: 10. **Розв'язок.** Маємо

$$16383 = 2^{14} - 1 = \left(2^7 + 1\right)\left(2^7 - 1\right) = 129 \cdot 127.$$

Позаяк число 129 є складеним, то 127 – найбільше просте число, на яке можна поділити 16383. Сума цифр 127 дорівнює $1 + 2 + 7 = 10$

3. Старий пастух заповів синам поділити стадо з 43 корів так, щоб старшому синові дісталося не менше половини стада, середньому – не менше третини, а молодшому – не менше дев'ятої частини. Чи зможуть сини виконати заповіт батька?
Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: Так. *Розв'язок.* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{18}$. Сини виконають заповіт батька, якщо візьмуть, наприклад, $23, 15$ і 5 корів, відповідно, позаяк $23 = \dfrac{46}{2} > \dfrac{43}{2}$, $15 = \dfrac{45}{3} > \dfrac{43}{3}$, а $5 = \dfrac{45}{9} > \dfrac{43}{9}$.

Позаяк 22 найменше ціле число, що задовольняє нерівність $22 = \dfrac{44}{2} > \dfrac{43}{2}$, то інші два варіанти поділу спадщини це по $22, 16, 5$ та по $22, 15, 6$ корів, відповідно.

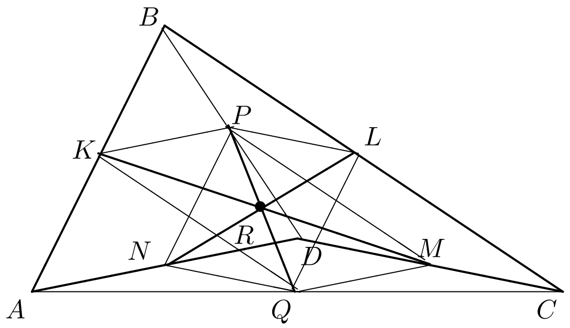
4. У продавця є по 5 гирьок вагою 270 г, 300 г і 693 г. Чи можна за одне зважування на шалькових терезах без поділок відважити 2025 г сипучого товару? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Так, можна. **Розв'язок.** Зауважимо, наприклад, що $2025 = 5 \cdot 693 - 300 \cdot 3 - 2 \cdot 270 \Longleftrightarrow 5 \cdot 693 = 2025 + 300 \cdot 3 + 2 \cdot 270$.

Далі, на одну чашку терезів кладемо 5 гирьок по 693 г, а на іншу (на яку досипатимемо товар) — 2 гирки по 270 г і 3 гирки по 300 г.

5. Довести, що в довільному чотирикутнику з непаралельними сторонами дві прямі, що сполучають середини протилежних його сторін, і пряма, що сполучає середини його діагоналей, перетинаються в одній точці.

Розв'язок.



Нехай $ABCD$ заданий чотирикутник, AC і BD – його діагоналі. K, L, M і N середини відповідно сторін AB, BC, CD і DA, а Q і P – відповідно середини діагоналей AC і BD. Відрізки PN і QL – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ зі спільною стороною AB, тому $NPLQ$ – паралелограм, а його діагоналі PQ і NL перетинаються в точці R, яка є їх серединою. Аналогічно відрізки KP і QM – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABD$ і $\triangle ACD$ зі спільною стороною AD, тому $KPMQ$ – паралелограм, а його діагональ KM перетинає діагональ PQ в її середині – точці R. Отже, всі три прямі KM, NL і PQ перетинаються в одній точці R.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

18 січня – 19 січня 2025 року, м.Львів

9 клас

1. Знайдіть всі такі цілі невід'ємні числа x та y, для яких виконується рівність

$$x^{2025} + y^2 = 2y.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: $(x, y) \in \{(0,\ 0),\ (0,\ 2),\ (1,\ 1)\}$. *Розв'язок.*
Рівняння нескладно переписується в еквівалентному вигляді $x^{2025} + (y-1)^2 = 1$. Звідси, за умовою маємо, що

$$0 \le x^{2025} \le 1,\ (y-1)^2 \le 1 \Longrightarrow 0 \le x \le 1,\ |y-1| \le 1.$$

Якщо $x = 0$, то $|y-1| = 1$, тобто, $y = 0$ або $y = 2$. Якщо $x = 1$, то $|y-1| = 0$, тобто, $y = 1$.

2. Найбільше просте число, що є дільником числа 16384 є 2, бо $16384 = 2^{14}$, а числа 34 є 17, бо $34 = 2 \cdot 17$. Яка сума цифр найбільшого простого числа, яке є дільником числа $2^{16} - 1$?

Відповідь: 14. **Розв'язок.**
Маємо

$$2^{16} - 1 = \left(2^8 + 1\right)\left(2^8 - 1\right) = 257 \cdot \left(2^4 - 1\right)\left(2^4 + 1\right) = 257 \cdot 15 \cdot 17.$$

Позаяк число 257 є простим, то воно є найбільшим простим числом, на яке можна поділити $2^{16} - 1$. Сума цифр 257 дорівнює $2 + 5 + 7 = 14$.

3. Довести, що $\dfrac{11}{23} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{2025} < \dfrac{44}{45}$.

Розв'язок.

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 46} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{45^2} <$$
$$< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{44 \cdot 45}.$$

Але,

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 46} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{45} - \frac{1}{46} = \frac{1}{2} - \frac{1}{46} = \frac{11}{23},$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{44 \cdot 45} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{44} - \frac{1}{45} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45},$$

що й треба було довести.

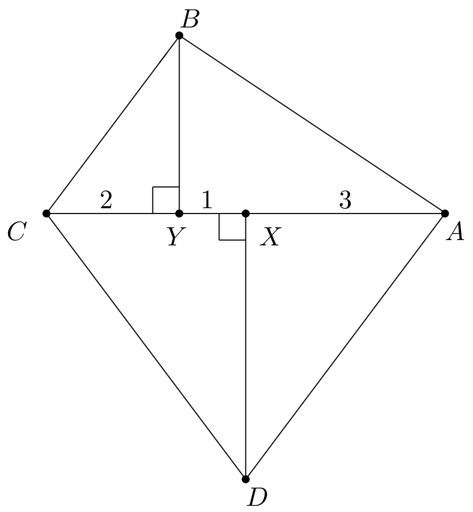
4. Скільки впорядкованих пар цілих чисел (m, n) задовольняють рівність $m^2 + mn + n^2 = m^2n^2$?

Відповідь. 3.*Розв'язок.* Очевидно, $m = 0, n = 0$ є однією з таких пар. Далі,

$$m^2 + mn + n^2 = m^2n^2 \Longleftrightarrow\ m^2 + mn + n^2 + mn = m^2n^2 + mn \Longleftrightarrow$$
$$(m+n)^2 = m^2n^2 + mn \Longleftrightarrow\ (m+n)^2 = mn(mn+1).$$

Позаяк $mn(mn+1)$ є, з одного боку, добутком двох послідовних цілих чисел, а з іншого боку, є повним квадратом цілого числа, то це можливо, лише у випадках $mn = 0$ або $mn + 1 = 0$. З $mn = 0$ маємо $m + n = 0$, тому $(m, n) = (0, 0)$, а у випадку $mn = -1$ маємо $m + n = 0$, звідки, $(m, n) = (1, -1)$ або $(m, n) = (-1, 1)$.

5. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами BC і AD.



Точки X і Y лежать на діагоналі AC, при чому X між A і Y, як зображено на рисунку. Припустимо, що $\angle AXD = \angle BYC = 90°$, $AX = 3$, $XY = 1$ і $YC = 2$. Знайдіть площу трапеції. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $3\sqrt{35}$. *Розв'язок.* Зауважимо, що $\triangle BCY \sim \triangle DAX$. Таким чином, оскільки $CY : XA = 2 : 3$, то $BY = 2s$ і $DX = 3s$. За теоремою Піфагора $AB^2 = (2s)^2 + 4^2 = 4s^2 + 16$ і $CD^2 = (3s)^2 + 3^2 = 9s^2 + 9$. Оскільки $AB = CD$, із формулювання задачі, маємо,

$$4s^2 + 16 = 9s^2 + 9.$$

Тоді $s = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$. Щоб знайти площу трапеції, ми можемо обчислити площу $\triangle ABC$ і додати до неї площу $\triangle ACD$. Отже, площа трапеції дорівнює $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot 6 + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot 6\right) = \frac{15\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{35}$.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

18 січня – 19 січня 2025 року, м.Львів

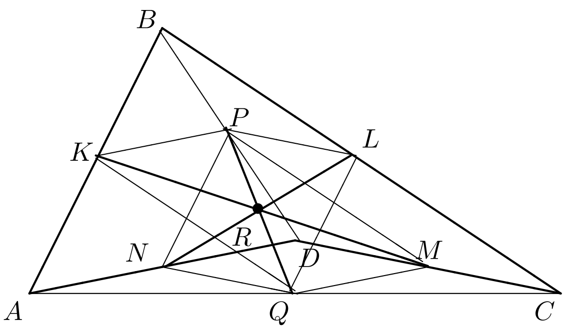
10 клас

1. Розв'язати рівняння
$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+2025}+x}{x}}-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+2025}-x}{x}}=1.$$

Відповідь: $x=60$. *Розв'язок.* Нескладно зрозуміти, що ОДЗ $x>0$. Позначимо $t=\sqrt{1+\frac{2025}{x^2}}$. тоді з початкового рівняння отримаємо рівняння $\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}=1$ ОДЗ якого $t\geq 1$. Розглянемо функцію
$$f(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}=\frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}.$$
Звідси випливає, що дана функція є строго монотонно спадна на інтервалі $[1,+\infty)$, а її найбільше значення дорівнює $f(1)=\sqrt{2}$. Тому рівняння $\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}=1$ має єдиний розв'язок. Маємо $\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}=1 \Longleftrightarrow t+1=t-1+2\sqrt{t-1}+1 \Longleftrightarrow 1=2\sqrt{t-1} \Longleftrightarrow t_0=\dfrac{5}{4}$. Звідси вже нескладно отримати, що
$$x^2=\frac{2025}{t_0^2-1}=2025\frac{16}{3^2}=225\cdot 16 \Longleftrightarrow x=60.$$

2. Довести, що в довільному чотирикутнику з попарно мимобіжними сторонами дві прямі, що сполучають середини протилежних його сторін, і пряма, що сполучає середини його діагоналей, перетинаються в одній точці.

Розв'язок.



Нехай $ABCD$ заданий чотирикутник, AC і BD – його діагоналі. K, L, M і N середини відповідно сторін AB, BC, CD і DA, а Q і P – відповідно середини діагоналей AC і BD. Відрізки PN і QL – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ зі спільною стороною AB, тому $NPLQ$ – паралелограм, а його діагоналі PQ і NL перетинаються в точці R, яка є їх серединою. Аналогічно відрізки KP і QM – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABD$ і $\triangle ACD$ зі спільною стороною AD, тому $KPMQ$ – паралелограм, а його діагональ KM перетинає діагональ PQ в її середині – точці R. Отже, всі три прямі KM, NL і PQ перетинаються в одній точці R.

3. Найбільше просте число, що є дільником числа 16384 є 2, бо $16384=2^{14}$, а числа 34 є 17, бо $34=2\cdot 17$. Яка сума цифр найбільшого простого числа, яке є дільником числа $2^{18}-1$? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: 10. **Розв'язок.**Маємо $2^{18}-1=\left(2^6\right)^3-1=\left(2^6-1\right)\left(2^{12}+2^6+1\right)=63\cdot(4096+64+1)=3^2\cdot 7\cdot 4161=3^3\cdot 7\cdot 19\cdot 73.\Longrightarrow 73$ – найбільше просте число, на яке можна поділити $2^{18}-1$. Сума цифр 73 дорівнює $7+3=10$.

4. Знайдіть всі такі цілі невід'ємні числа x та y, для яких виконується рівність
$$x^{2025}+y^5=-3y^2+3y+1.$$
Відповідь обгрунтувати.

Відповідь: $(x,y)\in\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$.

Розв'язок. Нескладно перевіряється, що функція $g(t)=-t^2+t$ в точці $t=1/2$ має найбільше значення $g(1/2)=1/4$, тому функція $f(t)=-3t^2+3t+1=3g(t)+1$ в точці $t=1/2$ має найбільше значення $f(1/2)=3/4+1<2$. Отже, для всіх цілих значень x,y маємо
$$0\le x^{2025}+y^5=3y^2-3y+1\le 1.$$
Звідси, за умовою маємо, що $0\le x\le 1, 0\le y\le 1\Longrightarrow$
$$\max\{x^{2025},\ y^5\}=1\Longrightarrow x=1\Longrightarrow y=0 \text{ або } y=1\Longrightarrow x=0.$$

5. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x_1^2+x_1x_2+\cdots+x_1x_{44}+x_1x_{45}=1,\\ x_1x_2+x_2^2+\cdots+x_2x_{44}+x_2x_{45}=3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_1x_{44}+x_2x_{44}+\cdots+x_{44}^2+x_{44}x_{45}=87,\\ x_1x_{45}+x_2x_{45}+\cdots+x_{44}x_{45}+x_{45}^2=89.\end{cases}$$

Розв'язок. Винесемо в лівих частинах рівнянь за дужки спільний множник і додамо рівняння та винесемо в лівій частині суми за дужки спільний множник $x_1+x_2+\cdots+x_{45}$. Отримаємо $(x_1+x_2+\cdots+x_{45})^2=(1+89)+(3+87)+\cdots+(43+47)+45=90\cdot 22+45=2025$, звідки $x_1+x_2+\cdots+x_{45}=-45$ або $x_1+x_2+\cdots+x_{45}=45$. Далі, ділячи кожне з рівнянь системи на $x_1+x_2+\cdots+x_{45}$ отримуємо
$$\begin{cases} x_1=-1/45,\\ x_2=-3/45=-1/15,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{45}=-89/45,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1=1/45,\\ x_2=3/45=1/15,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{45}=89/45.\end{cases}$$

Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

18 січня – 19 січня 2025 року, м.Львів

11 клас

1. Довести, що для довільних $a, b, c, d > 0$ виконується нерівність
$$\frac{\left(3+a^4\right)\left(3+b^4\right)\left(3+c^4\right)\left(3+d^4\right)}{abcd} \geq 4^4.$$

Розв'язок. Розглянемо функцію $f(t) = \dfrac{3+t^4}{t} = \dfrac{3}{t} + t^3$, $t > 0$. Зауважимо, що $f'(t) = -\dfrac{3}{t^2} + 3t^2 = 3 \cdot \dfrac{t^4-1}{t^2} = 0 \Longrightarrow t = t_0 = 1$. При цьому $f'(t) < 0$ для всіх $t \in (0,1)$ та $f'(t) > 0$ для всіх $t \in (1, +\infty)$. Тому, точка $t_0 = 1$ є точкою глобального мінімуму функції $f(t)$ на $(0, +\infty)$. Тому, $f(t) \geq f(1) = 4$ для всіх $t \in (0, +\infty)$.

Завершує доведення застосування останньої нерівності 4 рази:
$$\frac{\left(3+a^4\right)\left(3+b^4\right)\left(3+c^4\right)\left(3+d^4\right)}{abcd} = f(a)f(b)f(c)f(d) \geq 4^4.$$

2. В залежності від значень параметра a розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=2025, \\ xy=z^2. \end{cases}$$

Відповідь: при $45/\sqrt{3} \leq |a| \leq 45/\sqrt{3}$: $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2a} \pm \sqrt{D}\right)$,
$y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2a} \mp \sqrt{D}\right)$, $z = \frac{a^2-b^2}{2a}$, $D = \frac{10a^2b^2-3(a^4+b^4)}{(2a)^2}$, $b^2 = 2025$; при інших значеннях a система не має розв'язків.

Розв'язок. Зауважимо, що
$$a^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = 2025+2z^2+2z(x+y) =$$
$$= 2025+2z^2+2z(a-z) \Longrightarrow 2az = a^2-2025 = a^2-b^2 \Longrightarrow z_0 = \frac{a^2-b^2}{2a}$$
при $a \neq 0$. Зауважимо також, що при $a = 0$ рівність $2az = a^2 - 2025$ є неможливою, тому в цьому випадку система розв'язків не має.

Залишається розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=a-z_0, \\ xy=z_0^2. \end{cases}$ З цієї системи отримуємо квадратне рівняння $x(a-x-z_0) = z_0^2 \Longleftrightarrow$
$x^2+(z_0-a)x+z_0^2 = 0$. Дискримінант цього рівняння
$$D = (z_0-a)^2 - 4z_0^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{(2a)^2} - 4\frac{(a^2-b^2)^2}{(2a)^2} = \frac{10a^2b^2-3(a^4+b^4)}{(2a)^2} \geq 0.$$
Для того, щоб розв'язати останню нерівнсть використаємо заміну $t = (a/b)^2$ і перейдемо до нерівності $3t+3/t-10 \leq 0 \Longleftrightarrow 3t^2-10t+3 \leq 0 \Longleftrightarrow 1/3 \leq t \leq 3 \Longleftrightarrow b^2/3 \leq a^2 \leq 3b^2$. Далі зрозуміло.

3. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $x \in \big[-1, 1 - \dfrac{\sqrt{15}}{4}\big)$.

Розв'язок. ОДЗ нерівності $-1 \le x \le 3$.. Позначимо $h_0(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}$. Зауважимо, що функція $y = \sqrt{3-x}$ – строго спадає, а функція $y = \sqrt{1+x}$ – строго зростає, тому функція $h_0(x)$ – строго спадає на всьому інтервалі $(-1, 3)$, звідки, $h_0(x) = 1/\sqrt{2}$ в єдиній точці. Знайдемо цю точку. Для цього розв'язуємо рівняння $\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$

$$3 - x + 1 + x - 2\sqrt{3-x}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{7}{4} = \sqrt{3-x}\sqrt{1+x} \Longrightarrow$$

$$x^2 - 2x + \frac{1}{16} = 0 \Longrightarrow\ x \in \{1 \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\}.$$

Але, $h_0(x) <_h (1) = 0$ для всіх $x > 1$, тому єдиний корінь нашого рівняння це $x_0 = 1 - \frac{\sqrt{15}}{4}$. Крім цього, $h_0(x) > h_0(x_0) = 1/\sqrt{2}$ для всіх $x \in [-1, x_0)$.

4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+2025}+x}{x}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+2025}-x}{x}} = a.$$

Відповідь: $x = \frac{180a^2}{4-a^4}$. *Розв'язок.* Нескладно зрозуміти, що ОДЗ $x \ge 0$. Позначимо $t = \sqrt{1 + \frac{2025}{x^2}}$. тоді з початкового рівняння отримаємо рівняння $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = a$. Розглянемо функцію $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = \frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}$. Звідси випливає, що дана функція є строго монотонно спадна на інтервалі $[1, +\infty)$, а її найбільше значення дорівнює $f(1) = \sqrt{2}$. Тому рівняння $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = a$ не має розв'язків при $a \notin (0, \sqrt{2}]$, при $a = \sqrt{2}$ рівняння має єдиний розв'язок $t = 1$. Рівняння має єдиний розв'язок також при $0 < a < \sqrt{2}$. Відшукаємо цей розв'язок. Маємо

$$\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = a \Longleftrightarrow t + 1 = t - 1 + 2a\sqrt{t-1} + a^2 \Longleftrightarrow$$
$$2 - a^2 = 2a\sqrt{t-1} \Longleftrightarrow t_0 = \frac{(2-a^2)^2}{4a^2} + 1 = t = \frac{4+a^4}{4a^2}.$$

Звідси вже нескладно отримати, що

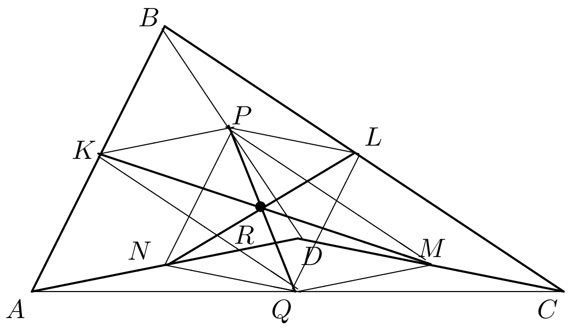
$$x^2 = \frac{2025}{t_0^2 - 1} = 2025\frac{16a^4}{(4-a^4)^2} \Longleftrightarrow x = \frac{180a^2}{4-a^4}.$$

5. Скільки непорожніх підмножин B з $\{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$ мають властивість, що кількість елементів B дорівнює найменшому елементу з B? Наприклад,множина $B = \{4, 6, 8, 11\}$ задовольняє умову.

Відповідь: 144. *Розв'язок.* Якщо множина B має найменший елемент 1, то вона складається лише з одного елемента: 1. Якщо множина B має найменший елемент 2, то вона містить два елементи і її інший елемент вибирається з натуральних чисел від 3 до 12 включно; таких можливостей вибору є C_{10}^1. Якщо множина B має найменший елемент 3, то інші 2 елементи слід вибрати з натуральних чисел від 4 до 12 включно; таких можливостей вибору є C_9^2. Якщо множина B має найменший елемент k, то інших $k-1$ елементів слід вибрати з натуральних чисел від $k+1$ до 12 включно; таких можливостей вибору є C_k^{11-k}. З умови $12-k \geq k$, тобто, $k \leq 6$. Іншими словами, кількість непорожніх підмножин B з описаною властивістю дорівнює $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$.

6. Довести, що в довільному чотирикутнику з попарно мимобіжними сторонами дві прямі, що сполучають середини протилежних його сторін, і пряма, що сполучає середини його діагоналей, перетинаються в одній точці.

Розв'язок.



Нехай $ABCD$ заданий чотирикутник, AC і BD – його діагоналі. K, L, M і N середини відповідно сторін AB, BC, CD і DA, а Q і P – відповідно середини діагоналей AC і BD. Відрізки PN і QL – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ зі спільною стороною AB, тому $NPLQ$ – паралелограм, а його діагоналі PQ і NL перетинаються в точці R, яка є їх серединою. Аналогічно відрізки KP і QM – паралельні і рівні як середні лінії трикутників $\triangle ABD$ і $\triangle ACD$ зі спільною стороною AD, тому $KPMQ$ – паралелограм, а його діагональ KM перетинає діагональ PQ в її середині – точці R. Отже, всі три прямі KM, NL і PQ перетинаються в одній точці R.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет