Відповіді до задач очного туру. 11 клас

1. В момент, коли швидкість нижньої кульки (масою m_2 для визначеності) максимальна, її прискорення рівне нулеві. Оскільки стержень не розтягнений, то єдина сила, яка діє на верхню кульку — сила тяжіння, а отже, її прискорення — $\mathbf{g}$. Прискорення центра мас відповідно $\mathbf{a} = \frac{r}{l}\mathbf{g}$, де $r = \frac{m_1 l}{m_1+m_2}$ — відстань від нижньої кульки до центра мас.

2. Позначимо (див. рис. 1) r — відстань від кульки до центра мас системи

$$mr = \left(\frac{L}{2} - r\right) M, \Rightarrow r = \frac{ML/2}{m+M}.$$

За відсутності тертя рівноважним буде положення стержня з мінімальною потенціальною енергією, тобто, максимальним y. З геометричної по-

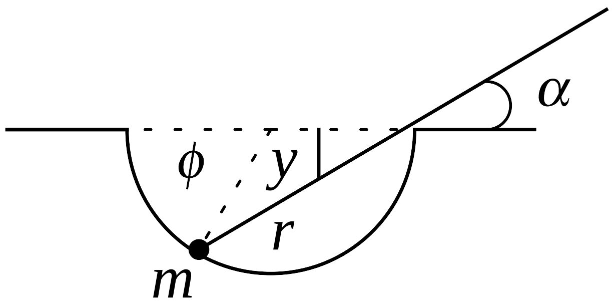

Рис. 1

будови

$$y = R\sin\phi - r\sin\alpha,$$

і застосовуючи формулу для відстані між двома точками і відому теорему $\phi = 2\alpha$,

$$y = R\sin\phi - \frac{r\sin\phi}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi}} = R\sin(2\alpha) - r\sin\alpha.$$

Умова $y > 0$ задовольняється, коли $L < 4\frac{m+M}{M}R$, і для більших довжин стержень лежатиме горизонтально. Рахуючи похідну від y за α і прирівнюючи її до нуля отримуємо

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{8R} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{r}{8R}\right)^2},$$

кут нахилу при фіксованій довжині стержня L. Розрахунком y'' переконуємось, що він реалізує мінімум потенціальної енергії.

3. Позначивши кількості речовини і об'єми газів в початковий момент як ν, V, і запишемо рівняння стану до

$$pV = \nu RT,$$

і після зміження поршня на висоту h

$$(p - \Delta p_u)(V + Sh) = \nu R(T + \Delta T),$$
$$(p + \Delta p_d)(V - Sh) = \nu R(T + \Delta T).$$

Різниця тисків газів

$$\Delta p = \Delta p_u + \Delta p_d = \frac{mg}{S}.$$

Зміна потенціальної енергії поршня пішла на нагрівання газів

$$mgh = 2\frac{3}{2}\nu R\Delta T.$$

Виразивши об'єм з першого рівняння, а площу основи циліндра з четвертого та з урахуванням п'ятого, маємо

$$(p - \Delta p_u)\left(\frac{T}{p} + \frac{3\Delta T}{\Delta p}\right) = T + \Delta T,$$
$$(p + \Delta p_d)\left(\frac{T}{p} - \frac{3\Delta T}{\Delta p}\right) = T + \Delta T.$$

Поділивши обидва боки рівнянь на другі дужки зліва та віднявши отримані вирази, зводимо систему до квадратного рівняння з розв'язком

$$\Delta T = \frac{T}{5}\left(\sqrt{1 + \frac{5}{3}\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} - 1\right).$$

4. Нехай $I(t) = \alpha t$, а е.р.с. самоіндукції в колі

$$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -L\frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = -\alpha L,$$

а напруга на конденсаторі

$$U = \frac{q(t)}{C(t)}.$$

З умови $U + \mathcal{E} = 0$ та враховуючи, що $-\frac{\Delta q}{\Delta t} = I = \alpha t$ (заряд стікає), знаходимо після інтегрування

$$q(t) = q_0 - \frac{\alpha t^2}{2},$$

(де q_0 — початковий заряд пластини конденсатора) і підстановки

$$C(t) = \frac{1}{\alpha L}\left(q_0 - \frac{\alpha t^2}{2}\right) = C_0 - \frac{t^2}{2L}, \quad C_0 = \frac{q_0}{\alpha L}.$$

5. Сила натягу стержнів без обертання

$$T = \frac{kq^2}{l^2}.$$

З обертанням до неї додається поправка, що скомпенсовує відцентрову і силу Лоренца (див. рис. 2)

$$2\Delta T\frac{\sqrt{3}}{2} = F_L + F_c = \frac{mv^2}{R} + qvB,$$

де радіальна швидкість зарядів $v = \omega R$, а $R = \frac{l}{\sqrt{3}}$ — радіус кола, описаного навколо трикутника. Звідки знаходимо

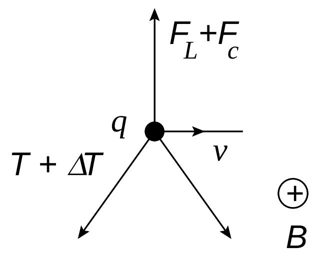

Рис. 2

$$\Delta T = \frac{l\omega}{3}(m\omega + qB),$$

або

$$\frac{T + \Delta T}{T} = 1 + \frac{\omega l^3}{3kq^2}(m\omega + qB).$$