

1. **Вантаж на нитці.** На нитці довжиною 50 см підвішений вантаж масою 100 грам. Якщо на нитку підвісити вантаж масою 2 кілограми, то цей вантаж розриває її, розтягуючи нитку в момент розриву на 2% від її довжини. Визначити, на яку мінімальну висоту необхідно підняти вантаж масою 100 грам, щоб він, падаючи, розірвав цю нитку. Враховувати, що закон Гука для нитки виконується до її розриву.

Розв'язок

Дано:

$$l = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м};$$

$$m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг};$$

$$M = 2 \text{ кг};$$

$$h = ?$$

Вантаж масою m , який впав з висоти h , володіє кінетичною енергією, яка буде рівна зміні потенціальної енергії, тобто $E_k = mgh$. Ця кінетична енергія повинна перетворитися в енергію пружної деформації, тобто якщо виконується закон Гука, то вона буде становити $\frac{kx^2}{2}$, де x – розтяг нитки в момент розриву, k – жорсткість нитки.

Тоді отримуємо рівняння

$$mgh = \frac{kx^2}{2}. \quad (1)$$

Також за умовою задачі для вантажу масою M , підвішеного на нитці, діють дві сили: сила тяжіння та сила натягу нитки, тоді ми можемо записати, що

$$Mg = kx, \quad (2)$$

при цьому $x = 0,02 l$ за умовою задачі.

Підставивши рівняння (2) у рівняння (1), отримуємо

$$2mgh = Mgx$$

І врахувавши, що $x = 0,02 l$, отримуємо

$$2mh = 0,02 Ml,$$

звідси

$$h = \frac{0,02 Ml}{2m} = \frac{0,02 \cdot 2 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,1} = 0,1 \text{ м}$$

Відповідь: вантаж масою 100 г необхідно підняти на висоту 0,1 м.

2. **Контракція розчину.** Воду і етанол змішують між собою так, що об'єм отриманого розчину становить 1 дм^3 , а масова частка етанолу в розчині дорівнює $37,5 \%$. Знайти об'єми води та етанолу, які змішали. При змішуванні речовин відбувається їхня контракція на 6% , тобто об'єм отриманого розчину стає на 6% менший за початковий сумарний об'єм води та етанолу. Густина води – 1000 кг/м^3 , густина етанолу – 790 кг/м^3 .

Розв'язок

Дано:

$$V_{\text{розчину}} = 1 \text{ дм}^3 = 0,001 \text{ м}^3;$$

$$w = 37,5 \% = 0,375;$$

$$\gamma = 6 \% = 0,06;$$

$$\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_{\text{етанолу}} = 790 \text{ кг/м}^3.$$

$$V_{\text{води}} - ?$$

$$V_{\text{етанолу}} - ?$$

Позначимо масу води – $m_{\text{води}}$, а масу етанолу – $m_{\text{етанолу}}$. Знаючи масову частку етанолу $37,5 \%$, можна знайти співвідношення мас води та етанолу:

$$w = \frac{m_{\text{етанолу}}}{m_{\text{розчину}}} = \frac{m_{\text{етанолу}}}{m_{\text{етанолу}} + m_{\text{води}}},$$

тоді

$$0,375 = \frac{m_{\text{етанолу}}}{m_{\text{етанолу}} + m_{\text{води}}}$$

$$0,375 (m_{\text{етанолу}} + m_{\text{води}}) = m_{\text{етанолу}}$$

$$0,375m_{\text{води}} = 0,625m_{\text{етанолу}},$$

звідси

$$m_{\text{етанолу}} = 0,6m_{\text{води}}.$$

Враховуючи коефіцієнт контракції можна записати рівняння для сумарного початкового об'єму рідин:

$$V_{\text{води}} + V_{\text{етанолу}} = \frac{V}{1 - \gamma}$$

або

$$(V_{\text{води}} + V_{\text{етанолу}}) = \frac{V}{0,94}.$$

Об'єми води та етанолу можна виразити через їх маси та густини за формулами:

$$\frac{m_{\text{води}}}{\rho_{\text{води}}} + \frac{m_{\text{етанолу}}}{\rho_{\text{етанолу}}} = \frac{V}{0,94}$$

Тепер підставимо співвідношення $m_{\text{етанолу}} = 0,6m_{\text{води}}$ у попереднє рівняння:

$$\frac{m_{\text{води}}}{\rho_{\text{води}}} + \frac{0,6m_{\text{води}}}{\rho_{\text{етанолу}}} = \frac{V}{0,94}$$

звідси визначимо масу води :

$$m_{\text{води}} = \frac{\rho_{\text{води}}\rho_{\text{етанолу}}V}{(\rho_{\text{етанолу}} + 0,6\rho_{\text{води}})0,94}$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$m_{\text{води}} = \frac{1000 \cdot 790 \cdot 0,001}{(790 + 0,6 \cdot 1000)0,94} = 0,605 \text{ кг.}$$

Далі визначимо масу етанолу:

$$m_{\text{етанолу}} = 0,6m_{\text{води}} = 0,6 \cdot 0,605 = 0,363 \text{ кг.}$$

Тепер підставимо отримані значення маси у формули для об'єму та визначимо їхні значення:

$$V_{\text{води}} = \frac{m_{\text{води}}}{\rho_{\text{води}}} = \frac{0,605 \text{ кг}}{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 0,000605 \text{ м}^3 = 0,605 \text{ дм}^3,$$

$$V_{\text{етанолу}} = \frac{m_{\text{етанолу}}}{\rho_{\text{етанолу}}} = \frac{0,363 \text{ кг}}{790 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 0,000459 \text{ м}^3 = 0,459 \text{ дм}^3.$$

Відповідь: $V_{\text{води}} = 0,605 \text{ дм}^3$, $V_{\text{етанолу}} = 0,459 \text{ дм}^3$.

3. **Пліт.** Для перевезення туристів з одного берега до іншого на озері Синевир використовують дерев'яний пліт, який складається з 15 дерев'яних брусів розміром $20 \times 20 \times 1600$ см, з'єднаних між собою. Скільки туристів може вмістити такий пліт, перш ніж вони намочать ноги, якщо припустити, що середня особа має масу 70 кг? Густина води 1000 кг/м^3 , а деревини – 600 кг/м^3 .

Розв'язок

Дано:

$$N = 15;$$

$$a = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м};$$

$$l = 1600 \text{ см} = 16 \text{ м};$$

$$m = 70 \text{ кг};$$

$$\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_{\text{деревини}} = 600 \text{ кг/м}^3;$$

n – ?

На дерев'яний пліт з людьми діє сила тяжіння та виштовхувальна сила Архімеда. Виштовхувальна сила у нашому випадку має дорівнювати вазі води, витісненої повним об'ємом брусів, а також має бути рівною повній вазі плота плюс пасажирів. Нехай n позначає кількість пасажирів. Тоді

$$N(V_{\text{бруса}}\rho_{\text{води}}g) = nmg + N(V_{\text{бруса}}\rho_{\text{деревини}}g).$$

Об'єм бруса визначаємо за формулою, що визначає об'єм паралелепіпеда

$$V_{\text{бруса}} = a^2l.$$

Підставляємо у рівняння і визначаємо n

$$N(a^2l\rho_{\text{води}}g) = nmg + N(a^2l\rho_{\text{деревини}}g)$$

$$nm = N(a^2l\rho_{\text{води}}) - N(a^2l\rho_{\text{деревини}})$$

$$nm = Na^2l(\rho_{\text{води}} - \rho_{\text{деревини}})$$

$$n = \frac{Na^2l(\rho_{\text{води}} - \rho_{\text{деревини}})}{m}.$$

Підставляємо значення у формулу

$$n = \frac{15 \cdot (0,2 \text{ м})^2 \cdot 16 \text{ м} (1000 - 600) \text{ кг/м}^3}{70 \text{ кг}} = 54,86.$$

Відповідь: Пліт може вмістити 54 особи. Якщо на пліт розмістити 55 осіб, то він потоне.

4. **Карпати.** По дорозі із вершини гори Висока (1824 м) до вершини гори Ігровець (1804 м) середня швидкість туриста склала 4,5 км/год, а максимальний перепад висот $h = 120$ м. Відстань між вершинами на карті складає 1,26 км, а $\angle\alpha=20^\circ$ та $\angle\beta=15^\circ$. Яка швидкість руху туриста на рівнині, якщо під час підйому вона падає на 8% на кожні 5 градусів нахилу, а при спуску зростає на 5%? (Малюнок схематичний)

$$\sin 15^\circ = 0,259; \cos 15^\circ = 0,966; \sin 20^\circ = 0,342; \cos 20^\circ = 0,939;$$



Розв'язок

Дано:

$$H_B = 1824 \text{ м};$$

$$H_I = 1804 \text{ м};$$

$$h = 120 \text{ м};$$

$$L = 1,26 \text{ км} = 1260 \text{ м};$$

$$v_{\text{сер}} = 4,5 \text{ км/год} = 1,25 \text{ м/с};$$

$$\angle\alpha = 20^\circ;$$

$$\angle\beta = 15^\circ;$$

$$v_p - ?$$



На карті відстань 1,26 км — це горизонтальна проєкція. Враховуючи кути нахилу, реальні відстані на спуску L_c і підйомі L_{Π} можна знайти:

$$L_c = \frac{h_c}{\sin\alpha}, \quad L_{\Pi} = \frac{h_{\Pi}}{\sin\beta}.$$

Оскільки перепад висот максимум 120 м, то можна припустити, що:

$$h_c = 120 \text{ м}, \text{ а } h_{\Pi} = h - \Delta h, \text{ де } \Delta h = H_B - H_I = 1824 - 1804 = 20 \text{ м}.$$

Довжина рівної ділянки (L_p) визначається через горизонтальні проєкції спуску та підйому:

$$L_p = L - (L_c \cos\alpha + L_{\Pi} \cos\beta).$$

Нехай швидкість на рівнині v_p , тоді, з урахуванням залежності швидкості від нахилу:

$$v_{\Pi} = 0,76v_p, \text{ а } v_c = 1,2v_p$$

де:

- $v_{\Pi} = 0,76v_p$ — швидкість на підйомі зменшується на 24%,
- $v_c = 1,20v_p$ — швидкість на спуску збільшується на 20%.

Середня швидкість визначається як відношення загальної відстані до загального часу:

$$v_{\text{сер}} = \frac{L_c + L_p + L_{\Pi}}{\frac{L_c}{v_c} + \frac{L_p}{v_p} + \frac{L_{\Pi}}{v_{\Pi}}}$$

Підставляємо значення для v_c та v_{Π} :

$$v_{\text{сер}} = \frac{L_c + L_p + L_{\Pi}}{\frac{L_c}{1,2v_p} + \frac{L_p}{v_p} + \frac{L_{\Pi}}{0,76v_p}}$$

Розв'язуємо рівняння відносно v_p :

$$v_p = \frac{v_{\text{сер}} \left(\frac{L_c}{1,2} + L_p + \frac{L_{\Pi}}{0,76} \right)}{L_c + L_p + L_{\Pi}}$$

Підставляємо числові значення:

$$L_c = 350,9 \text{ м}; L_{\Pi} = 386,1 \text{ м}; L_p = 557,5 \text{ м};$$

$$v_p = 4,72 \text{ км/год} = 1,31 \text{ м/с.}$$

Відповідь: швидкість туриста на рівнині 4,72 км/год.

5. **Куля і блок.** Куля масою 5 г, яка рухається зі швидкістю 800 м/с, проходить крізь мідний блок масою 5 кг, який знаходиться в нерухомому стані на столі без тертя. Тридцять п'ять відсотків кінетичної енергії кулі йде на нагрів блоку, а сорок відсотків – на кінетичну енергію блоку. Решта кінетичної енергії залишається з кулею. Блок і куля до взаємодії мали температуру 25 °С. Яка температура і швидкість блоку після проходження через нього кулі, а також якою стала швидкість кулі. Тертям мідного блоку по столі нехтуємо ($c_{Cu} = 385 \text{ Дж/кг}\cdot\text{°C}$).

Розв'язок

Дано:

$$m = 5 \text{ г} = 0,005 \text{ кг};$$

$$v_1 = 800 \text{ м/с};$$

$$M = 5 \text{ кг};$$

$$c_{Cu} = 385 \text{ Дж/кг}\cdot\text{°C};$$

$$t_{B1} = t_{к1} = 25\text{°C}$$

$$t_{B2} - ?$$

$$v_2 - ?$$

$$v_B - ?$$

Спочатку знайдемо кінетичну енергію кулі до взаємодії з блоком

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{0,005 \text{ кг} \cdot (800 \text{ м/с})^2}{2} = 1600 \text{ Дж}.$$

35%, тобто $1600 \cdot 0,35 = 560 \text{ Дж}$ від цієї кінетичної енергії йде на нагрівання блоку, тоді ми можемо визначити на скільки нагрівся мідний блок після проходження через нього кулі

$$Q = mc\Delta t,$$

звідси

$$\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{560 \text{ Дж}}{5 \text{ кг} \cdot 385 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot \text{°C}} = 0,29\text{°C}.$$

Тепер можемо визначити температуру блока після проходження через нього кулі

$$\Delta t = t_{B2} - t_{B1},$$

$$\text{звідси } t_{B2} = \Delta t + t_{B1} = 0,29 \text{ °C} + 25\text{°C} = 25,29 \text{ °C}.$$

Далі з умови задачі 40% від кінетичної енергії кулі переходить в кінетичну енергію мідного блока, тобто

$$0,4 \cdot E_k = \frac{Mv_B^2}{2}.$$

З цього співвідношення можемо визначити швидкість блоку v_B , після проходження через нього кулі:

$$v_B^2 = \frac{0,8E_k}{M},$$
$$v_B = \sqrt{\frac{0,8E_k}{M}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 1600 \text{ Дж}}{5 \text{ кг}}} = 16 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Решта кінетичної енергії, тобто 25% залишається з кулею, тому можемо визначити швидкість кулі після проходження блоку:

$$0,25 E_k = \frac{mv_2^2}{2},$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{0,5E_k}{m}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 1600 \text{ Дж}}{0,005 \text{ кг}}} = 400 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $t_{B2} = 25,29 \text{ }^\circ\text{C}$, $v_B = 16 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $v_2 = 400 \text{ м/с}$.