

1. Поїзд довжиною $L = 300$ м і мотоцикліст, який стоїть біля хвоста поїзда, починають рухатись в одному напрямку. Швидкість поїзда $v_1 = 20$ км/год, а мотоцикліста – $v_2 = 30$ км/год. Коли мотоцикліст наздогнав голову поїзда миттєво розвернувся і почав рухатись назад зі швидкістю $v_3 = 40$ км/год. Який шлях пройшов мотоцикліст від початку свого руху до зустрічі з хвостом поїзда.

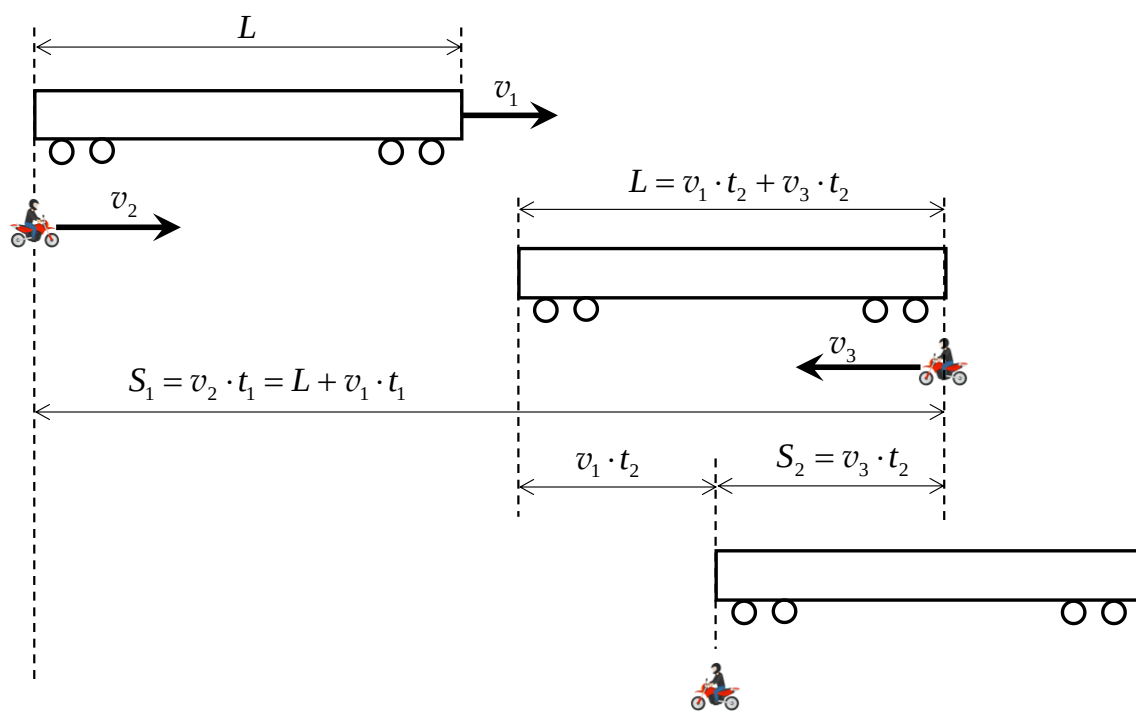
Розв'язання:

Коли мотоцикліст наздогнав голову поїзда він пройшов шлях

$$S_1 = v_2 \cdot t_1 \quad (1)$$

де v_2 – швидкість мотоцикліста; t_1 – час за який мотоцикліст наздогнав голову поїзда. При цьому голова поїзда пройшла віддаль $v_1 \cdot t_1$, де v_1 – швидкість руху поїзда. Врахувавши, що довжина поїзда дорівнює L маємо (рисунок):

$$L + v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_1 \quad (2)$$



Після того як мотоцикліст наздогнав голову поїзда мотоцикліст починає рухатись у зворотному напрямку зі швидкістю v_3 і до зустрічі з хвостом поїзда проходить шлях

$$S_2 = v_3 \cdot t_2 \quad (3)$$

де t_2 – час руху мотоцикліста до зустрічі з хвостом поїзда.

За час t_2 зворотного руху мотоцикліста у зворотному напрямку до зустрічі з хвостом поїзда хвіст поїзда пройшов відстань $v_1 \cdot t_2$.

Отже,

$$L = S_2 + v_1 \cdot t_2. \quad (4)$$

Повний шлях S , який пройшов мотоцикліст дорівнює:

$$S = S_1 + S_2, \quad (5)$$

З формул (1) і (2) знаходимо:

$$S_1 = \frac{v_2 \cdot L}{v_2 - v_1} \quad (6)$$

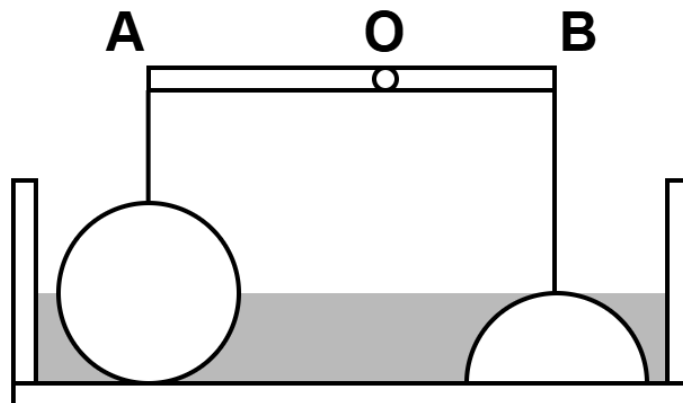
З формул (3) і (4) знаходимо:

$$S_2 = \frac{v_3 \cdot L}{v_1 + v_3} \quad (7)$$

З формул (6) і (7) знаходимо повний шлях мотоцикліста від початку руху до зустрічі з хвостом поїзда:

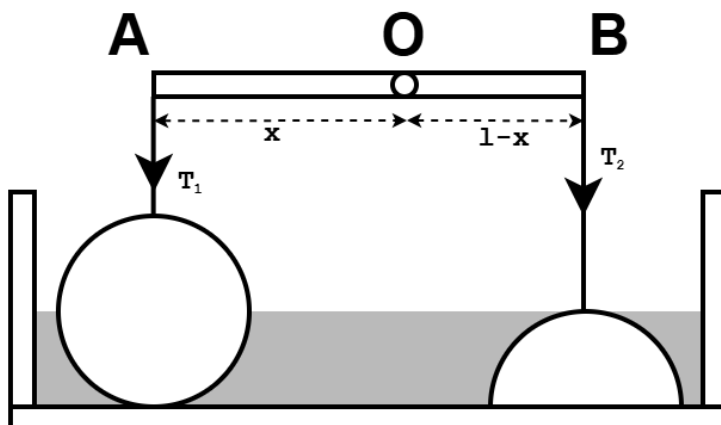
$$S = L \cdot \left(\frac{v_2}{v_2 - v_1} + \frac{v_3}{v_1 + v_3} \right) \quad (7)$$

2. Однорідна сфера маси m і однорідна півсфера з того ж матеріалу та радіусу r розміщені у посудині. У посудині налита вода до висоти $r = 30$ см, як показано на рисунку. Під півсферою немає ні води, ні повітря. Сфера і півсфера обидві з'єднані вертикальними нитками з кінцями легкої штанги АВ довжини $l = 116$ см, яка має шарнір О. Знайдіть відстань від шарніра до кінця А, щоб при мінімальному підйомному зусиллі, прикладеному в точці шарніра, сфера і півсфера одночасно відірвалися від дна посудини. Густина матеріалу сфери становить $\rho = 5.0$ г/см³, а густина води - $\rho_0 = 1.0$ г/см³



Розв'язання:

Під час піднімання шарніру АВ за точку опори О сфера та півсфера будуть створювати сили натягу T_1 та T_2 та відповідні моменти сил $M_1 = T_1 x$ та $M_2 = T_2(l - x)$, відповідно.



Для того щоб сфера і півсфера одночасно відірвалися від дна посудини ці моменти сил повинні бути однаковими:

$$T_1 x = T_2 (l - x)$$

Звідки виразимо величину x :

$$x = \frac{T_2 l}{T_1 + T_2}$$

Визначимо сили натягу ниток для сфери та півсфери:

1) На сферу будуть діяти протилежно напрямлені сила Архімеда та сила тяжіння:

$$T_1 = m_1 g - \rho_0 g V_1$$

Оскільки сфера занурена на половину в рідину, то отримаємо:

$$T_1 = g \rho \frac{4}{3} \pi r^3 - \rho_0 g \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi g r^3 (2\rho - \rho_0)$$

2) Оскільки півсфера лежить на дні посудини таким чином, щоб під півсферою немає ні води, ні повітря, то виштовхувальна сила, що буде діяти на неї буде визначатися різницею сили Архімеда та гідростатичного тиску що створює рідина на площу основи півсфери S зануреної на глибину r :

$$F_B = g \rho_0 \frac{2}{3} \pi r^3 - g \rho_0 r S = g \rho_0 \frac{2}{3} \pi r^3 - g \rho_0 r^3$$

Таким чином сила натягу нитки півсфери із врахуванням сили тяжіння запишеться:

$$T_2 = m_2 g - F_B = g \rho \frac{2}{3} \pi r^3 - g \rho_0 \frac{2}{3} \pi r^3 + g \rho_0 r^3$$

$$T_2 = \frac{2}{3} g \rho \pi r^3 + \frac{1}{3} g \rho_0 \pi r^3 = \frac{\rho \pi r^3}{3} (2\rho + \rho_0)$$

Підставимо отримані сили натягу у вираз для визначання положення точки прикладання О:

$$x = \frac{\frac{\rho \pi r^3}{3} (2\rho + \rho_0) l}{\frac{2}{3} \pi g r^3 (2\rho - \rho_0) + \frac{\rho \pi r^3}{3} (2\rho + \rho_0)} = \frac{(2\rho + \rho_0) l}{6\rho + \rho_0} = 44 \text{ см}$$

Відповідь: Відстань від шарніра О до кінця А становить 44 см

3. У колбу масою 100 г, температура якої 20°C, наливають 200 г води за температури 80°C і додають кусок льоду масою 200 г за температури -20°C. Яка температура встановиться в колбі після настання термодинамічної рівноваги? Теплообміном колби з навколишнім середовищем знехтувати.

Питома теплоємність матеріалу колби – 800 Дж/(кг·К),

питома теплоємність води – 4200 Дж/(кг·К),

питома теплоємність льоду – 2100 Дж/(кг·К),

питома теплота плавлення льоду – 334 кДж/кг.

Розв'язання:

У системі (колба, вода, лід) можливі такі процеси:

- I. Лід повністю розтанув і система досягла деякої додатної або рівної нулю температури.
- II. Лід частково розтанув, температура даної системи буде рівна 0°C, оскільки лід плавиться за температури 0°C.
- III. Лід лише нагрівся до вищої але від'ємної температури і частина води в колбі замерзла.

З'ясуємо який з процесів відбувається насправді.

Для того щоб лід повністю розтанув потрібно затратити теплоту на його нагрівання від температури -20°C до 0°C і на його плавлення.

На нагрівання льоду потрібно затратити кількість теплоти:

$$C_{\text{л}} \cdot m_{\text{л}} \cdot (0 - t_{\text{л}}) = 2100 \cdot 0,2 \cdot 20 = 8400 \text{ Дж} \quad (1)$$

На плавлення льоду потрібно затратити кількість теплоти:

$$\lambda \cdot m_{\text{л}} = 334000 \cdot 0,2 = 66800 \text{ Дж} \quad (2)$$

Отже, щоб лід розтанув, загалом потрібно затратити:

$$8400 \text{ Дж} + 66800 \text{ Дж} = 75200 \text{ Дж} \quad (3)$$

Цю теплоту лід може отримувати від води з колбою. Знайдемо кількість теплоти яку може віддати колба з водою охолодившись до температури 0°C.

Колба з водою охолоджуючись до 0°C може віддати кількість теплоти рівну:

$$C_k \cdot m_k \cdot (t_k - 0) + C_v \cdot m_v \cdot (t_v - 0) = 800 \cdot 0,1 \cdot 20 + 4200 \cdot 0,2 \cdot 80 = 68800 \text{ Дж} \quad (4)$$

Як бачимо, що теплоти яку може віддати колба з водою охолодившись до 0°C , не достатньо щоб повністю розтанув лід. Цієї теплоти вистачить щоб нагріти лід до температури 0°C (8400 Дж), а решту теплоти

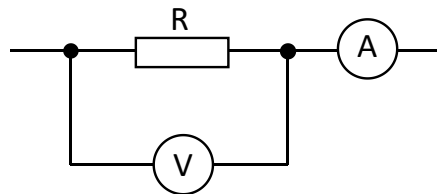
$$68800 \text{ Дж} - 8400 \text{ Дж} = 60400 \text{ Дж} \quad (5)$$

буде затрачено на плавлення лише деякої частини льоду (щоб весь лід розтанув потрібно 66800 Дж (2)), температура якого буде 0°C .

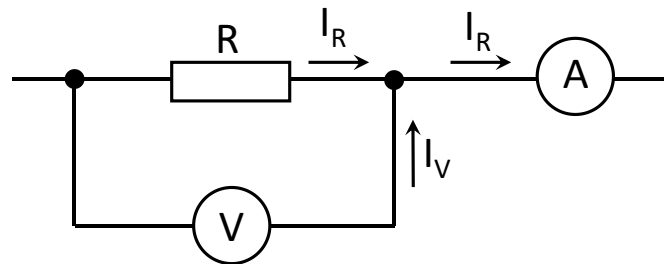
Отже, після настання термодинамічної рівноваги температура в колбі становитиме 0°C .

Відповідь: Температура в колбі, яка встановиться після настання теплової рівноваги, дорівнює 0°C .

4. Який опір R на схемі, якщо покази амперметра 3 А, покази вольтметра 10 В, внутрішній опір вольтметра 2500 Ом.



Розв'язання:



Струм, який протікає через амперметр (покази амперметра) дорівнює сумі струмів через резистор R і вольтметр:

$$I_A = I_R + I_V \quad (1)$$

Згідно з законом Ома наруга на опорі R рівна:

$$U_R = I_R \cdot R \quad (2)$$

а наруга на вольтметрі (покази вольтметра):

$$U_V = I_V \cdot R_V \quad (3)$$

Оскільки опір R і вольтметр з'єднані паралельно то на наруги на них однакові:

$$U_R = U_V \quad (4)$$

З формули (2) виражаємо опір R :

$$R = \frac{U_R}{I_R}, \quad (5)$$

Врахувавши (1), (3) та (4) одержимо:

$$R = \frac{U_R}{I_A - I_V} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}. \quad (6)$$

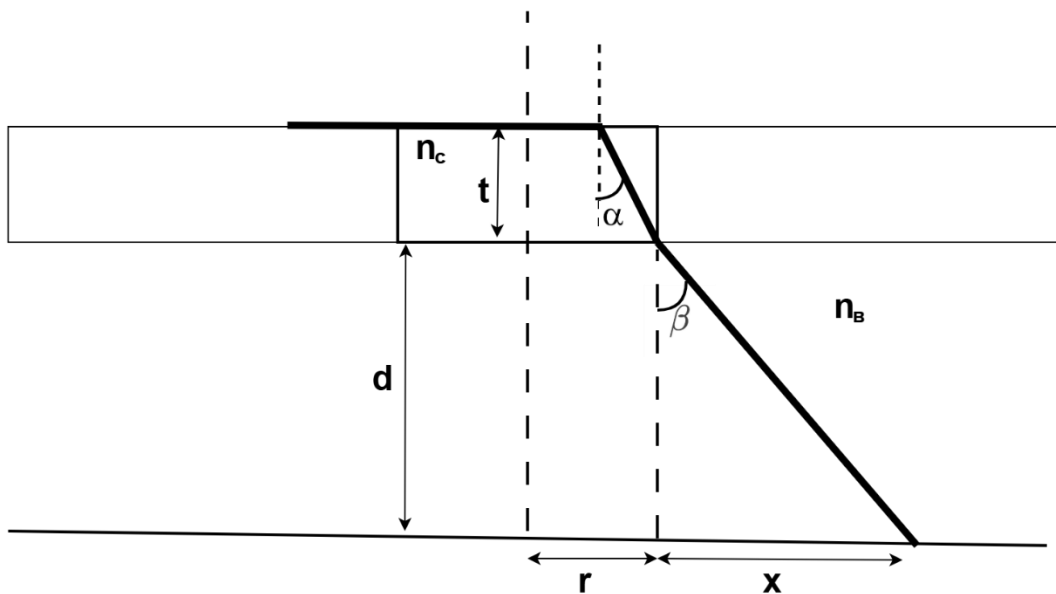
Після обчислень одержимо:

$$R = \frac{10 \text{ В}}{3 \text{ А} - \frac{10 \text{ В}}{2500 \text{ Ом}}} \approx 3,34 \text{ Ом}.$$

5. Дослідницький підводний човен має кругле скляне вікно на дні, щоб спостерігати за морським дном. Радіус вікна $r = 30$ см, товщина скла $t = 20$ мм, показник заломлення води $n_B = 1.25$, скла $n_c = 1.5$. Якщо морське дно знаходиться під вікном на відстані $d = 6.0$ м, оцініть радіус частини морського дна, видимої через вікно (у метрах).

Розв'язання:

Розглянемо хід променів із підводного човна через вікно до морського дна. В процесі проходження промінь буде двічі заломлюватись на межах повітря/скло та скло/вода. Граничний випадок найбільшого кута зору із підводного човна на дно відповідатиме випадку повного внутрішнього відбивання на межі повітря та скла, як показано на рисунку:



Радіус видимої області R із вікна становитиме:

$$R = r + x$$

Невідому величину x визначимо із прямокутного трикутника з кутом β :

$$x = d \cdot \tan \beta$$

Запишемо закони заломлення світла на межі середовищ повітря / скло та скло / вода:

$$\sin 90^\circ = n_c \sin \alpha$$

$$n_c \sin \alpha = n_B \sin \beta$$

Виразимо синус граничного кута β :

$$\sin \beta = \frac{1}{n_B}$$

Зробимо перетворення тангенса:

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$$

Підставимо у вираз для невідомої величини x :

$$x = d \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = d \frac{\frac{1}{n_B}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n_B^2}}} = \frac{d}{\sqrt{n_B^2 - 1}}$$

Отриманий результат підставимо у вираз для невідомої величини радіусу огляду R :

$$R = r + \frac{d}{\sqrt{n_B^2 - 1}} \approx 8.3 \text{ м}$$

Відповідь: Радіус видимої області із вікна 8.3 м