КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД ЛЬВІВСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ
«ЛЬВІВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ»

Кафедра природничо-математичної освіти

ПРОГРАМА
підвищення кваліфікації вчителів математики закладів загальної середньої освіти

«ФОРМУЛИ ОЖИВАЮТЬ: ПРАКТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ»

Програма підвищення кваліфікації розглянута і рекомендована до затвердження на засіданні кафедри природничо-математичної освіти

(протокол № 11 від 14 вересня 2026 року)

Завідувач кафедри Ольга ТУРИЦЯ

Програма підвищення кваліфікації затверджена науково-методичною радою

(протокол № 6 від 01 жовтня 2026 року)

Голова науково-методичної ради Павло ХОБЗЕЙ

Розробник:
Бєлінська Інна Вікторівна, старший викладач кафедри природничо-математичної освіти комунального закладу Львівської обласної ради «Львівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти».

Термін дії програми: з 01.09.2026 до 29.12.2031.

Рецензенти:
Біда Дарія Дмитрівна, кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри педагогіки комунального закладу Львівської обласної ради «Львівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти».
Шаповаловський Олександр Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри природничо-математичної освіти комунального закладу Львівської обласної ради «Львівський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти».

1. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Актуальність програми зумовлена стабільною складністю теми «Рівняння з параметрами» для учнів і вчителів математики. Параметричні рівняння регулярно трапляються серед завдань національного мультипредметного тесту (НМТ), зазвичай серед завершальних, найскладніших завдань, водночас системної підготовки вчителів до впевненого володіння технікою їх розв'язування бракує. Тема вимагає глибокого розуміння того, як розв'язок рівняння залежить від значення параметра, і вільного володіння різними методами дослідження цієї залежності.

Програма орієнтована передусім на типи завдань, що регулярно трапляються на НМТ, — лінійні та квадратні рівняння з параметром, дослідження кількості коренів і розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданого числа. Інші типи — дробово-раціональні, з модулем, ірраціональні, показникові, логарифмічні та тригонометричні рівняння з параметром — розглядаються у стислішому обсязі: програма дає вчителю впевнене розуміння методу розв'язування кожного типу, не заглиблюючись у весь спектр нестандартних випадків.

Окреме місце в програмі посідають графічні методи та засоби динамічної візуалізації. Графічна інтерпретація вводиться одразу після опрацювання лінійних і квадратних рівнянь, коли залежність розв'язку від параметра вже усвідомлена аналітично, і надалі супроводжує роботу з усіма іншими типами рівнянь. Такий порядок дає змогу використовувати

побудовані моделі як інструмент перевірки гіпотез протягом усього курсу, а не лише на завершальному етапі.

Програма послідовно реалізує компетентнісний підхід, покладений в основу Державного стандарту базової середньої освіти: параметр трактується не як абстрактна буква, а як величина, що моделює реальну умову, яку потрібно дослідити, — допустиме відхилення розміру деталі, межа вигідності ціни, умова існування розв'язку фізичної чи економічної моделі. Тому частина задач програми має зрозумілий життєвий сенс, а не лише формальний алгебраїчний інтерес.

Програма є суто предметним математичним курсом. Її мета — поглибити й систематизувати власне володіння вчителя технікою розв'язування рівнянь з параметрами різних типів, розширити арсенал прийомів, зокрема графічних із застосуванням GeoGebra, та навчити впевнено орієнтуватися в завданнях з параметром, що трапляються на НМТ. Програма доповнює курс, присвячений нерівностям з параметром, і може опрацьовуватися незалежно від нього.

Цільова група: учителі математики закладів загальної середньої освіти.

Обсяг (тривалість): 30 годин (1 кредит ЄКТС).

Особливості реалізації: не передбачено.

Форма підвищення кваліфікації: очно-дистанційна.

Мета підвищення кваліфікації: підвищення професійної компетентності педагогічних працівників щодо розв'язування рівнянь з параметрами, формування здатності застосовувати класичні й нестандартні прийоми розв'язування, використовувати цифрові інструменти для візуалізації розв'язків та розв'язувати компетентнісно орієнтовані задачі з реальним контекстом.

Завдання підвищення кваліфікації:

— ознайомити педагогів із сучасними методами розв'язування рівнянь з параметрами;

— сформувати розуміння основних типів рівнянь з параметром і методів дослідження кількості та розміщення коренів;

— розвинути здатність застосовувати графічні методи та цифрові інструменти для розв'язування й візуалізації рівнянь з параметрами;

— навчити розв'язувати компетентнісно орієнтовані задачі з реальним контекстом і задачі різного рівня складності;

— сформувати вміння аналізувати типові формулювання й пастки завдань з параметром;

— сприяти розвитку професійної рефлексії та готовності до інноваційної діяльності.

Перелік компетентностей, що вдосконалюватимуться:

(відповідно до Професійного стандарту «Вчитель закладу загальної середньої освіти», затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України від 29 серпня 2024 року № 1225): предметно-методична компетентність (А2), здатність до навчання впродовж життя (Д1).

Очікувані результати підвищення кваліфікації

— розв'язує рівняння з параметром різних типів класичними та нестандартними прийомами;

— досліджує кількість і розміщення коренів залежно від значення параметра;

— застосовує графічні методи та засоби GeoGebra для візуалізації й перевірки розв'язків;

— упевнено орієнтується в завданнях з параметром, що трапляються на НМТ.

Система та критерії оцінювання результатів підвищення кваліфікації

Оцінювання результатів навчання здійснюється на засадах компетентнісного підходу та передбачає поєднання формувального та підсумкового оцінювання.

Практичні завдання та самостійна робота оцінюються засобами формувального оцінювання без виставлення балів: на практичних заняттях — індивідуальне та фронтальне опитування, аналіз розв'язків; на лекціях — експрес-контроль у формі коротких запитань з теми.

Підсумкове оцінювання здійснюється у формі онлайн-тестування, на яке відведено окрему годину в навчально-тематичному плані. Максимальна кількість балів — 20. Прохідний бал — 12.

Документ про підвищення кваліфікації: сертифікат, за умови відвідування не менше 50% авдиторних занять та успішне виконання тестування.

Вартість: безоплатний характер надання освітньої послуги для слухачів курсів підвищення кваліфікації за регіональним замовленням місцевих органів управління освітою, вартість згідно з кошторисом відповідно до порядку надання платних послуг для всіх інших категорій.

2. НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

Програмою передбачено поєднання лекційних і практичних занять, самостійної роботи учасників курсу та підсумкового оцінювання, що забезпечує цілісне й поетапне поглиблення предметної компетентності

вчителів математики. Навчання організовано на засадах системності, практико орієнтованості та поступового ускладнення навчального матеріалу: від лінійних і квадратних рівнянь з параметром як основного типу завдань НМТ — до графічних методів, інших типів рівнянь і практикуму розв'язування реальних завдань тесту.

Найбільшу питому вагу мають лінійні та квадратні рівняння з параметром: на них відведено окремий модуль із трьох тем, а модулі, присвячені графічним методам і практикуму завдань тесту, спираються переважно на той самий матеріал. Дослідження кількості коренів і розміщення коренів квадратного тричлена подано окремими темами, оскільки друге питання потребує систематичного розгляду умов, що визначають взаємне розташування коренів і заданого числа чи проміжку.

Програма є суто предметним математичним курсом: практична частина зосереджена на поглибленому відпрацюванні техніки розв'язування рівнянь з параметрами різних типів і на розвитку впевненого володіння вчителя математичним апаратом теми, а не на методичних прийомах роботи з учнями.

Курс відкривається вступним блоком (ознайомлення з навчальним середовищем і діагностика очікувань слухачів) і завершується підсумковим блоком, що поєднує рефлексію над засвоєним матеріалом і контрольне тестування.

Кількість годин, що відводиться на засвоєння змісту програми, складає 30 годин, з них:

— лекційні заняття — 8 годин;
— практичні заняття — 15 годин;
— самостійна робота — 6 годин;
— підсумковий контроль (тестування) — 1 година.

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

Назва навчальних тем	Кількість годин				
	Лекції	**Практичні заняття**	**Самостійна робота**	**Контрольні заходи**	**Усього**
ВСТУПНИЙ БЛОК					
Ознайомлення з навчальним середовищем. Формування очікувань учасників	0	2	0	0	2
МОДУЛЬ 1. Лінійні та квадратні рівняння з параметром					
Тема 1.1. Лінійні рівняння з параметром	1	1	1	0	3
Тема 1.2. Квадратні рівняння з параметром: дослідження кількості коренів	1	1	1	0	3
Тема 1.3. Розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданого числа чи проміжку	1	2	1	0	4
Разом за модулем	**3**	**4**	**3**	**0**	**10**
МОДУЛЬ 2. Графічні методи та візуалізація засобами GeoGebra					
Тема 2.1. Графічний метод розв'язування рівнянь з параметром. Інструмент «повзунок»	1	2	0	0	3
Разом за модулем	**1**	**2**	**0**	**0**	**3**
МОДУЛЬ 3. Інші типи рівнянь з параметром					
Тема 3.1. Дробово-раціональні рівняння та рівняння, що містять знак модуля	1	1	1	0	3
Тема 3.2. Ірраціональні рівняння з параметром	1	1	0	0	2
Тема 3.3. Показникові та логарифмічні рівняння з параметром	1	1	1	0	3
Тема 3.4. Тригонометричні рівняння з параметром	1	1	0	0	2
Разом за модулем	**4**	**4**	**2**	**0**	**10**
МОДУЛЬ 4. Практикум розв'язування завдань з параметром					
Тема 4.1. Розбір завдань з параметром	0	2	1	0	3

Назва навчальних тем	Кількість годин				
	Лекції	**Практичні заняття**	**Самостійна робота**	**Контрольні заходи**	**Усього**
із сесій НМТ					
Разом за модулем	**0**	**2**	**1**	**0**	**3**
ПІДСУМКОВИЙ БЛОК					
Рефлексія та підбиття підсумків курсу	0	1	0	0	1
Контрольне тестування	0	0	0	1	1
Разом за блоком	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**
Усього	**8**	**15**	**6**	**1**	**30**

3. ЗМІСТ ПРОГРАМИ

ВСТУПНИЙ БЛОК

Ознайомлення з навчальним середовищем Moodle, інструментами та правилами спілкування в дистанційному форматі. Знайомство учасників, діагностика їхніх очікувань, наявного досвіду розв'язування рівнянь з параметрами і типових труднощів у роботі з цією темою. Узгодження формату курсу та критеріїв оцінювання.

МОДУЛЬ 1. Лінійні та квадратні рівняння з параметром

Тема 1.1. Лінійні рівняння з параметром

Поняття параметра. Область допустимих значень змінної та параметра. Методи розв'язування лінійних рівнянь з параметром: дослідження за значеннями коефіцієнта при змінній, зокрема випадок нульового коефіцієнта. Типові помилки: втрата кореня та ділення на вираз, що містить параметр. Аналіз типових формулювань завдань (найбільше або найменше ціле значення параметра, за якого корінь задовольняє задану умову). Компетентнісно орієнтовані задачі з реальним контекстом: допустиме відхилення розміру деталі, межа вигідності ціни, умова балансу у фінансовій моделі.

Тема 1.2. Квадратні рівняння з параметром: дослідження кількості коренів

Випадок виродження квадратного рівняння в лінійне за нульового старшого коефіцієнта. Дослідження кількості коренів залежно від знака дискримінанта. Теорема Вієта та її застосування до дослідження властивостей коренів без їх обчислення. Умови додатності, від'ємності та різних знаків коренів. Компетентнісно орієнтовані задачі з реальним контекстом: умова існування розв'язку задачі про рівноприскорений рух, оптимальний діапазон значення параметра в економічній моделі.

Тема 1.3. Розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданого числа чи проміжку

Систематичний розгляд умов, що визначають взаємне розташування коренів квадратного тричлена та заданого числа: знак значення функції в цій точці, положення абсциси вершини параболи, знак дискримінанта. Основні конфігурації: обидва корені більші (менші) за задане число, число лежить між коренями, обидва корені належать заданому проміжку, рівно один корінь належить проміжку. Побудова відповідних систем умов та їх розв'язування. Типові помилки під час складання системи: пропуск умови на дискримінант, нехтування положенням вершини.

МОДУЛЬ 2. Графічні методи та візуалізація засобами GeoGebra

Тема 2.1. Графічний метод розв'язування рівнянь з параметром. Інструмент «повзунок»

Графічна інтерпретація рівняння з параметром: перетин графіка функції із сім'єю прямих або кривих, залежних від параметра. Розв'язування рівняння в системі координат «змінна — параметр». Знайомство з інструментами програми GeoGebra. Використання інструмента «повзунок» для динамічної зміни значення параметра та спостереження за поведінкою розв'язку, зокрема за рухом коренів квадратного тричлена відносно заданого числа. Побудова графічних моделей та їх використання для перевірки гіпотез, висунутих під час аналітичного розв'язування задачі. Побудовані моделі застосовуються надалі під час опрацювання тем модуля 3.

МОДУЛЬ 3. Інші типи рівнянь з параметром

Тема 3.1. Дробово-раціональні рівняння та рівняння, що містять знак модуля

Область допустимих значень і врахування значень параметра, за яких знаменник дорівнює нулю. Зведення дробово-раціонального рівняння до цілого з контролем сторонніх коренів. Розкриття знака модуля за проміжками, метод розбиття на випадки. Геометрична інтерпретація рівняння з модулем і параметром на координатній площині.

Тема 3.2. Ірраціональні рівняння з параметром

Методи розв'язування ірраціональних рівнянь з параметром: піднесення до степеня з контролем області визначення, заміна змінної, перехід до рівносильної системи. Типові помилки, пов'язані з появою сторонніх коренів і втратою умов невід'ємності.

Тема 3.3. Показникові та логарифмічні рівняння з параметром

Методи розв'язування показникових рівнянь з параметром: заміна змінної, властивості показникової функції, дослідження кількості розв'язків залежно від значення параметра. Область допустимих значень

логарифмічного рівняння з параметром. Властивості логарифмів і заміна змінної. Типові пастки, пов'язані з областю визначення та з умовами на основу логарифма.

Тема 3.4. Тригонометричні рівняння з параметром

Методи розв'язування тригонометричних рівнянь з параметром: заміна змінної, використання обмеженості тригонометричних функцій для дослідження кількості розв'язків. Відбір коренів на заданому проміжку залежно від значення параметра.

МОДУЛЬ 4. Практикум розв'язування завдань з параметром

Тема 4.1. Розбір завдань з параметром із сесій НМТ

Класифікація основних типів завдань з параметром за матеріалами сесій НМТ. Розбір реальних завдань минулих років. Аналіз поширених помилок і пасток у формулюваннях, зокрема розрізнення умов «за яких значень параметра розв'язок існує» та «за яких значень параметра розв'язок задовольняє задану умову». Практичні прийоми швидкого розв'язування в межах регламенту тесту: добір раціонального методу, оцінювання доцільності графічного підходу, контроль повноти розгляду випадків.

ПІДСУМКОВИЙ БЛОК

Рефлексія та підбиття підсумків курсу: обговорення того, що змінилося у власному розумінні методів розв'язування рівнянь з параметрами, фіксація прийомів, які планується застосовувати надалі. Контрольне тестування: підсумкова перевірка засвоєння змісту програми в онлайн-форматі.

3.1. ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

— розв'язування лінійних рівнянь з параметром та розбір типових формулювань завдань;

— аналіз типових помилок під час розв'язування лінійних рівнянь з параметром: втрата кореня, ділення на вираз із параметром;

— розв'язування компетентнісно орієнтованих задач із реальним контекстом на лінійні рівняння з параметром;

— дослідження кількості коренів квадратного рівняння з параметром залежно від дискримінанта;

— застосування теореми Вієта до дослідження знаків коренів без їх обчислення;

— складання систем умов для заданого розміщення коренів квадратного тричлена відносно числа;

— розв'язування задач на належність одного або обох коренів заданому проміжку;

— графічне розв'язування рівнянь з параметром у системі координат «змінна — параметр»;

— побудова моделі з інструментом «повзунок» у GeoGebra для дослідження розв'язку рівняння з параметром;

— використання побудованих у GeoGebra моделей для перевірки гіпотез, висунутих під час аналітичного розв'язування;

— розв'язування дробово-раціональних рівнянь з параметром із контролем області допустимих значень;

— розв'язування рівнянь з параметром, що містять знак модуля, методом розбиття на випадки;

— розв'язування ірраціональних рівнянь з параметром із контролем сторонніх коренів;

— розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь з параметром;

— розв'язування тригонометричних рівнянь з параметром і відбір коренів на заданому проміжку;

— розбір реальних завдань з параметром із сесій НМТ та аналіз типових пасток у формулюваннях;

— розв'язування банку завдань з параметром з обмеженням часу, наближеним до регламенту тесту.

3.2. ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

— методи розв'язування лінійних рівнянь з параметром і типові пастки: втрата кореня, ділення на вираз із параметром;

— дослідження кількості коренів квадратного рівняння з параметром залежно від дискримінанта;

— теорема Вієта як інструмент дослідження властивостей коренів без їх обчислення;

— умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданого числа чи проміжку;

— графічне розв'язування рівнянь з параметром у системі координат «змінна — параметр»;

— методи розв'язування дробово-раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних і тригонометричних рівнянь з параметром та рівнянь з модулем;

— контроль сторонніх коренів і області допустимих значень у рівняннях з параметром;

— типові формулювання і пастки завдань з параметром із сесій НМТ;

— компетентнісний підхід: чим задача з параметром і реальним контекстом відрізняється від тренувальної;

— можливості інструмента «повзунок» у GeoGebra для дослідження рівнянь з параметром.

4. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Нормативно-правові документи

Нормативно-правові документи опрацьовуються за чинними редакціями на момент проведення навчання.

1. Україна. Кабінет Міністрів України. Державний стандарт базової середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п (дата звернення: 01.09.2026).

2. Україна. Міністерство освіти і науки України. Професійний стандарт «Вчитель закладу загальної середньої освіти» : наказ від 29.08.2024 № 1225. URL: https://mon.gov.ua (дата звернення: 01.09.2026).

Основна література

3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : підручник для 10–11 класів. Київ : Гімназія, 2020.

4. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : рівняння з параметрами. Харків : Гімназія, 2019.

5. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра : підручник для закладів загальної середньої освіти. Тернопіль : Підручники і посібники, 2020.

6. Скляренко О. В. Рівняння з параметрами : методичний посібник для вчителів математики. Львів : Світ, 2021.

Додаткова література

7. Капіносов А. О. Задачі з параметрами для профільної школи. Київ : АССА, 2020.

8. GeoGebra : ресурс для побудови графіків і динамічного моделювання. URL: https://www.geogebra.org (дата звернення: 01.09.2026).